線形代数学第二　期末試験 (2010/2/3)

1. $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + w = 0\}$$

で定める。V の正規直交基底をひとつ求めよ。ただし内積は標準内積を考える。

略解.

$$\boldsymbol{x}_1 = {}^t(1, -1, 0, 0), \quad \boldsymbol{x}_2 = {}^t(1, 0, -1, 0), \quad \boldsymbol{x}_3 = {}^t(1, 0, 0, -1)$$

とおくとこれらは一次独立であり V の元なので V の基底になる。これらにシュミットの直交化を適用して正規直交基底にする。まず $\boldsymbol{e}_1 = (1/\sqrt{2})\boldsymbol{x}_1$ とすると $|\boldsymbol{e}_1| = 1$ である。次に

$$\boldsymbol{e}_2' := \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = {}^t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right)$$

であり、$\boldsymbol{e}_2'$ と $\boldsymbol{e}_1$ は直交する。そこで

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 1, -2, 0)$$

とすると $|\boldsymbol{e}_2| = 1$ となる。次に

$$\boldsymbol{e}_3' := \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = {}^t(1/3, 1/3, 1/3, -1)$$

より

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1, -3)$$

とすれば $|\boldsymbol{e}_3| = 1$ となる。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が求める正規直交基底である。(答えはもちろん一通りではない。)

2. 次の対称行列を直交行列で対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

略解. 固有多項式を計算すると

$$|\lambda E - A| = (\lambda + 6)^2(\lambda - 9)$$

となるので A の固有値は $9, -6$ である。9 の固有ベクトルは ${}^t(1,1,1)$ の定数倍である。また -6 の固有空間は $x + y + z = 0$ の解全体なので、その基底としてはたとえば ${}^t(1,-1,0)$, ${}^t(0,1,-1)$ がとれる。これは直交していないのでシュミットの直交化法により正規直交基底をとれば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,-1,0), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1,1,-2)$$

となる。そこで

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおけば P は直交行列であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

となる。

3. 次の行列 A は直交行列で $|A| = 1$ を満たす：

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

この行列が定める線形写像の回転軸と回転角を求めよ。

略解. A は固有値 1 をもつので、その固有ベクトルを求めると ${}^t(1,0,1)$ となる。よって回転軸は ${}^t(1,0,1)$ を方向ベクトルとしてもつ直線である。また、A と直交するベクトルとして $\boldsymbol{a} = {}^t(0,1,0)$ をとると、$A\boldsymbol{a} = (1/2)\cdot {}^t(1,-\sqrt{2},-1)$ である。そこで $\boldsymbol{b} = {}^t(1,-\sqrt{2},-1)$ とおいて $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば θ が求める回転角であり、

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

である。$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ であるから $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ となる。よって $\theta = 3\pi/4$ または $5\pi/4$ である。

4. 次の 2 次曲線のグラフを描け。

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = 0.$$

略解.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。A を $|P| = 1$ なる直交行列で対角化すると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで P は時計回りに $\pi/4$ だけ回転させる行列である。そこで

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} 5x^2 + 6xy + 5y^2 &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 2u^2 + 8v^2 \end{aligned}$$

となる。x, y を u, v で表すと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + v \\ -u + v \end{pmatrix}$$

となるから与式の左辺は

$$\begin{aligned} 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y &= 2u^2 + 8v^2 + 4\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) - 4\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(-u + v) \\ &= 2u^2 + 8v^2 + 8u \\ &= 2\{(u + 2)^2 + 4v^2 - 4\} \end{aligned}$$

となる。よって

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = 0 \iff (u + 2)^2 + 4v^2 = 4$$

となる。最後の曲線は uv 平面の楕円 $u^2 + 4v^2 = 4$ を u 方向に -2 だけ平行移動したものである。uv 座標は xy 座標を時計回りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものなので、もとの xy 座標を使って容易に描くことができる。(この解答ではグラフは省略する。) □