線形代数学第二　第１４回小テスト (2010/1/27)

学籍番号　　氏名

次の対称行列を対角行列で対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

略解. 固有多項式を計算すると

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)$$

となるので A の固有値は $4, -2$ である。-2 の固有ベクトルは ${}^t(1, -2, 1)$ の定数倍である。また 4 の固有空間は 1 次式 $x - 2y + z = 0$ の解全体なので、その基底としてはたとえば ${}^t(1, 0, -1)$, ${}^t(2, 1, 0)$ がとれる。これは直交していないのでシュミットの直交化法により正規直交基底をとれば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1)$$

となる。そこで

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおけば P は直交行列であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。