線形代数学第二　第１４回講義ノート

本多 宣博

2010 年 1 月 27 日

（何カ所か間違いがあったので修正しました。すみませんが、1 月 26 日 17 時 20 分以前にダウンロードした方は、差し替えて下さい。）最終回の今回は、対称行列の対角化の応用として 2 次曲線のグラフを描く。

2 次曲線とは、x, y の 2 次式 $F(x, y)$ を使って $F(x, y) = 0$ と表される図形のことである。（$F(x, y)$ のことを 2 次曲線の定義式という。）たとえば

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{（円）}$$
$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{（双曲線）}$$
$$x^2 - y = 0 \quad \text{（放物線）}$$

などは 2 次曲線のもっとも簡単な例である。（ただし、2 次「曲線」とは言っても、たとえば $x^2 + y^2 = 0$ は一点 $(0, 0)$ のみからなるし、$x^2 + y^2 = -1$ は空集合となるように、必ずしも「曲線」にはならないことに注意。）

一般の 2 次曲線は、定数 a, b, c, d, e, f（ただし a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 でない）を用いて

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{1}$$

と表せる。（$a = b = c = 0$ のときはこれは 1 次式になるので 2 次曲線とはいわない。）

上で挙げたような単純な 2 次曲線はわざわざ線形代数を使わなくてもグラフが容易に書けるわけだが、もっと複雑な 2 次曲線の場合はグラフを正確に描くことは容易ではない。しかしこれから説明するように、対称行列の対角化を使えばどんな 2 次曲線であっても統一的な方法でグラフを正確に描くことができる。以下では 2 次曲線

$$x^2 + xy + y^2 - x + y = 0 \tag{2}$$

の場合にやり方を説明する。まず 2 次の部分

$$x^2 + xy + y^2$$

は次のように対称行列を使って表すことができる：

$$x^2 + xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(一般の 2 次式 (1) の場合は

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。）そこで

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。前回定理 2.1 により A は直交行列で対角化できる。これを実行すると

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $|P| = 1$ なので P は回転行列であり、第一列目を見れば $P = R_{-\frac{\pi}{4}}$（すなわち時計回りに $\pi/4$ 回転させる行列）であることがわかる。すると

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \cdot P^{-1}AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

とおくと、P は直交行列であることから ${}^tP^{-1} = P$ であることに注意して

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P$$

となるので

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(u^2 + 3v^2) \end{aligned}$$

となる。次に、(2) の 1 次の部分を u, v で表すために (3) を使って x, y を u, v で表すと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u+v \\ -u+v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって (2) の左辺は

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 - x + y + 1 &= \frac{1}{2}(u^2 + 3v^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-u+v) \\ &= \frac{1}{2}(u^2 + 3v^2) - \sqrt{2}u \\ &= \frac{1}{2}(u - \sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}v^2 - 1\end{aligned}$$

となる。（最後は u に関して平方完成をした。）よって

$$x^2 + xy + y^2 - x + y = 0 \iff \frac{1}{2}(u - \sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}v^2 = 1$$

となる。最後の曲線は uv 平面の $(\sqrt{2}, 0)$ を中心とする楕円であり、これは容易に描くことができる。uv 座標は xy 座標を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものなので、もとの xy 座標を使って容易に描くことができる。

このやり方のポイントは、座標変換 (3) が $|P| = 1$ なる直交変換（回転）であるため、曲線の形が変わらないことである。（直交変換でない線形変換を使ってしまうと、ある方向にのみ極端に拡大または縮小される、ということが起きるため、形がかなり変わってしまう。）

練習問題 0.1 次の 2 次曲線のグラフを描け。

$$x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y - 6 = 0. \tag{4}$$

解答例. まず 2 次の部分は

$$x^2 - 6xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。真ん中に出てきた行列を A とすると、A は次のように $|P| = 1$ なる直交行列で対角化できる：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

P は上でやったものと同じで時計回りに $\pi/4$ 回転させる行列である。すると

$$\begin{aligned} x^2-6xy+y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \cdot P^{-1}AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと、上の例と同様にして

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P$$

となるので

$$\begin{aligned} x^2-6xy+y^2 &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 4u^2-2v^2 \end{aligned}$$

となる。x, y を u, v で表すと, 上の例と同様

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u+v \\ -u+v \end{pmatrix}$$

となるから (4) の左辺は

$$\begin{aligned} x^2-6xy+y^2+4x+4y-6 &= 4u^2-2v^2+\frac{4}{\sqrt{2}}(u+v)+\frac{4}{\sqrt{2}}(-u+v)-6 \\ &= 4u^2-2v^2+4\sqrt{2}v-6 \\ &= 4u^2-2(v-\sqrt{2})^2-2 \end{aligned}$$

となる。(最後は v に関して平方完成をした。) よって

$$x^2-6xy+y^2+4x+4y-6=0 \iff 4u^2-2(v-\sqrt{2})^2=2$$

となる。最後の曲線は uv 平面の双曲線 $4u^2-2v^2=2$ を v 方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動したものである。uv 座標は xy 座標を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものなので、もとの xy 座標を使って容易に描くことができる。(この講義ノートでは図を描けないのでグラフは省略する。) □

練習問題 0.2 次の２次曲線のグラフを図示せよ。

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}y = 0. \tag{5}$$

解答例. まず２次の部分は

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。真ん中の行列を A とすると、A は次のように $|P| = 1$ なる直交行列で対角化できる：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

P は時計回りに $\pi/3$ 回転させる行列である。そして

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \cdot P^{-1}AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと、上の例と同様にして

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P$$

となるので

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 4v^2 \end{aligned}$$

となる。x, y を u, v で表すと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u - \sqrt{3}v \\ \sqrt{3}u + v \end{pmatrix}$$

となるから (5) の左辺を u, v で表すと

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}y &= 4v^2 - \frac{1}{2}(u + \sqrt{3}v) + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(-\sqrt{3}u + v) \\ &= 4v^2 - 2u \end{aligned}$$

となる。よって

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}y = 0 \iff 2v^2 - u = 0$$

となる。最後の曲線は放物線である。uv 座標は xy 座標を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものなので、もとの xy 座標を使って容易に描くことができる。（これもこの講義ノートでは省略する。） □