線形代数学第二　第１３回小テスト (2010/1/20)

学籍番号　　氏名

次の行列は $|A| = 1$ を満たす直交行列である：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

この行列が定める線形写像の回転軸と回転角を求めよ。（ヒント：固有値１をもつことはすでにわかっているので、A の固有多項式を求める必要はない。必要なのは固有値１の固有ベクトルである。）

解答例. 固有値１の固有ベクトルを求めるために連立一次方程式

$$(E - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて、一つの解として $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ を得る。よって回転軸はこのベクトルで張られる直線である。回転角を求めるためには、この直線に直交するベクトル $\boldsymbol{a}$ を一つ取り、$\boldsymbol{a}$ と $A\boldsymbol{a}$ のなす角 θ を求めればよい。$\boldsymbol{a}$ としては ${}^t(1, 0, 0)$ がとれる。このとき $A\boldsymbol{a} = {}^t(1/\sqrt{2},\ -1/2,\ 1/2)$ であり、これは $\boldsymbol{b} = (\sqrt{2},\ -1,\ 1)$ に平行。（もちろん $\boldsymbol{a}$ と $A\boldsymbol{a}$ のなす角と、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角は等しい。）すると

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{2}, \quad |\boldsymbol{a}| = 1, \quad |\boldsymbol{b}| = 2$$

であるから

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。よって $\theta = \pi/4$ である。 □