線形代数学第二　第１３回講義ノート

本多 宣博

2010 年 1 月 20 日

(復習) 正方行列 A の対角化とは、正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるようなものを見つけることであった。このとき、対角行列 $P^{-1}AP$ の対角成分には A の固有値が並んだ（第 8 回命題 2.3)。実際に対角化をする際には、A の固有値と固有ベクトルを求めて、P としては固有ベクトルを並べて得られる行列をとればよかった。(ただしこれは A の固有値が相異なる場合であって、そうでない場合、すなわち A の固有多項式が重根を持つ場合は対角化できない場合があった。)

今回の主題は、対称行列[1]の対角化、およびそれを用いての第 10 回定理 1.2 の証明である。

1　対称行列の固有値と固有空間の性質

次の命題は第 10 回定理 1.2 の証明に必要になるだけでなく、それ自身重要である。

命題 1.1 対称行列のすべての固有値は実数である。 □

証明. λ を対称行列 A の固有値とし、$\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトルとする。(この段階では λ が実数であることはわかっていないので、$\boldsymbol{x}$ の各成分も実数とは限らないことに注意。) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より ${}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} > 0$ であるから、λ が実数であることを示す

[1] この講義では複素数を成分とする行列は基本的には扱わないので、対称行列といえば実数を成分とする対称行列（実対称行列という）を意味する。複素数を成分とする対称行列に対しては、今回の講義内容の多くは成立しない。複素数を成分とする行列の場合、考えるべき対象は、対称行列ではなく、エルミート行列と呼ばれるものであるが、この講義では扱わない。

ためには $\lambda\,{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\,{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}$ を示せばよい。左辺は

$$\begin{aligned}
\lambda\,{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} &= {}^t(\lambda\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} \\
&= {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} \quad (A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \text{ なので}) \\
&= {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\overline{\boldsymbol{x}} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{x}} \quad ({}^tA = A \text{ なので})
\end{aligned}$$

となる。一方、右辺は

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}\,{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} &= {}^t\boldsymbol{x}\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}\overline{\lambda\boldsymbol{x}} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}\overline{A\boldsymbol{x}} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{x}} \quad (\overline{A} = A \text{ なので})
\end{aligned}$$

となり、$\lambda\,{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}$ と一致する。よって λ は実数である。 □

定義 1.2 λ を n 次正方行列 A の実固有値とするとき、

$$V_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

のことを λ の**固有空間**という。 □

次の問題はもはや機械的にできなければいけない。

練習問題 1.3 固有空間は部分ベクトル空間であることを示せ。 □

解答例. 示すべきことは、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_\lambda$ と任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y} \in V_\lambda$ が成り立つことである。上のように $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, a, b$ をとると

$$\begin{aligned}
A(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) &= aA\boldsymbol{x} + bA\boldsymbol{y} \\
&= a\lambda\boldsymbol{x} + b\lambda\boldsymbol{y} \\
&= \lambda(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

となる。これは $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in V_\lambda$ を意味する。 □

行列 A の固有値が相異なるという条件は、A の任意の固有空間が 1 次元であることと同値であることに注意しよう。

命題 1.4 n 次対称行列の相異なる固有値の固有空間は $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関して直交する。すなわち、λ, μ を A の相異なる固有値とし、$\boldsymbol{x} \in V_\lambda$, $\boldsymbol{y} \in V_\mu$ とすると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が成り立つ。 □

証明. $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準内積とすると、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$$

となる。(3つめの等号で A が対称行列であることを使った。一般には $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$ となることに注意。) 特に $\boldsymbol{x}$ として λ の固有ベクトル、$\boldsymbol{y}$ として $\mu(\neq \lambda)$ の固有ベクトルをとると、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),\\ (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となるから、$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる。よって $\lambda \neq \mu$ より $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる。□

2 対称行列の対角化

対角化はどんな行列に対しても可能なわけではないが、対称行列の対角化に関しては次が成り立つ：

定理 2.1 対称行列はいつでも直交行列で対角化できる。すなわち任意の対称行列 A に対して、直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるようなものが存在する。 □

証明は後回しにして先に具体例を与える。

例 2.2 3次の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化してみよう。まず A の固有多項式は

$$\begin{aligned}|\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}\\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2)\end{aligned}$$

なので A の固有値は $-1, 3, 2$ であり、それぞれの固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

がとれる[2]。よって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となり対角化できる。しかし (1) は正規直交基底ではないので P は直交行列でない。そこで各ベクトルの長さを 1 にそろえて

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすればこれは正規直交基底になる。そこで

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば Q は直交行列であり、

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。 □

練習問題 2.3 次の対称行列を直交行列で対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

解答例. A の固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

[2] これらのベクトルは、命題 1.4 により自動的に直交していることに注意せよ。これは計算間違いのチェックにも使える。

なので A の固有値は $-2, 4$ である。4 の固有ベクトルは ${}^t(1,-2,-1)$ がとれる。また -2 の固有ベクトルは、一つの 1 次方程式 $x-2y-z=0$ の解なのでたとえば

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \tag{2}$$

がとれる[3]。そこで

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\\-1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

とすれば、$|P| = -6 \neq 0$ より P は正則行列であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

となる。しかしこの P はやはり直交行列ではない。そこでベクトルの組 (2) をシュミットの直交化法により直交化して

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

を得る。するとベクトル

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

は正規直交基底になるので

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

とおくと Q は直交行列であり、

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

となる。 □

[3] これらは同じ固有値の固有ベクトルであるから命題 1.4 は直交していることを保証しない。

定理 2.1 の証明. 対称行列 A のサイズに関する帰納法で証明する。まず $n=1$ のときは自明に成立する。そこで $(n-1)$ 次の任意の対称行列が直交行列で対角化できると仮定する。λ_1 を A の任意の固有値とすると命題 1.1 より λ は実数なのでその固有ベクトルとして実ベクトルがとれる。そのような固有ベクトルのうち長さが 1 のものを $\boldsymbol{x}_1$ とする。するとシュミットの直交化法により、$\boldsymbol{x}_1$ に $(n-1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を付け加えて $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底にすることができる。A が定める線形写像を $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とすると、こうして得られた正規直交基底に関する f の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

ただし A_1 は $n-1$ 次の正方行列で $\boldsymbol{a}$ は $(n-1)$ 個の数が並んだ横ベクトル, という形になる。すなわち、$P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} & A_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。ここで第 11 回命題 2.3 により P は直交行列であることに注意すると、

$${}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1}) = P^{-1}AP$$

となるので $P^{-1}AP$ も対称行列である。よって (3) より $\boldsymbol{a} = {}^t\boldsymbol{0}$ であり、かつ A_1 も対称行列である。すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 \text{ は対称}$$

となっている。すると帰納法の仮定により、A_1 は直交行列で対角化可能である、すなわち $(n-1)$ 次の直交行列 Q_1 で、$Q_1^{-1}A_1Q_1$ が対角行列であるようなものがとれる。そこで

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q_1 \end{pmatrix},$$

とおくと Q は n 次の直交行列であり、

$$\begin{aligned} Q^{-1}P^{-1}APQ &= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & Q_1^{-1}A_1Q_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから $Q^{-1}P^{-1}APQ$ は対角行列である。さらに第 11 回の練習問題 2.5 より PQ も直交行列であるから、A が直交行列 PQ で対角化できることが証明された。

以上により任意の対称行列が直交行列で対角化できることが示せた。 □

次に、定理 2.1 を使って、約束していた次の定理を証明しよう。

定理 2.4 (= 第 10 回定理 1.2) 対称行列が正定値であるためには、その固有値がすべて正であることが必要十分である。 □

証明. 対称行列 A が正定値であるとは、任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \geq 0$ であり、等号成立が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときに限ることだった。定理 2.1 により A は直交行列 P で対角化できる：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ここで $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値の全体であった。（第 8 回命題 2.3）$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ とおくとき, P は正則行列であるから、$\boldsymbol{y}$ が $\mathbb{R}^n$ 全体を動くとき、$\boldsymbol{x}$ も $\mathbb{R}^n$ 全体を動き、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときに限る。よって任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, に対して ${}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) > 0$ であることを示せばよいが、P が直交行列であることから ${}^tP = P^{-1}$ が成り立つことに注意して

$$\begin{aligned} {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) &= {}^t\boldsymbol{y}\,{}^tPAP\boldsymbol{y} \\ &= {}^t\boldsymbol{y}P^{-1}AP\boldsymbol{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \text{ただし } \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

となる。これが任意の $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ に対して正であるための必要十分条件は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がすべて正であることである。（第１０回例 1.1 も参照。）よって定理が証明された。 □

(以上)