線形代数学第二　第１２回講義ノート

本多 宣博

2010 年 1 月 13 日

前回は、2 次の直交行列は、行列式が 1 であるか -1 であるかに応じて回転行列または折り返し行列になることを学んだ。今回の主題は 3 次の直交行列である。

1　3 次の直交行列の定める変換の幾何的な意味

3 次の直交行列を作るもっとも簡単な方法は、2 次の直交行列 A をもってきて

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

を考えることである。容易にわかるようにこれは直交行列である。この行列が定める線形写像により (x, y) 成分は $A\,{}^t(x, y)$ にうつり、z 成分は変わらない。よって A が回転行列なら z 軸の周りの回転になり、A が折り返し行列なら平面に関する折り返しになる。これをモデルにして一般の 3 次直交行列が定める線形写像の性質を調べよう。

（3 次に限らず）任意の直交行列の行列式は 1 または -1 だったことを思い出そう。行列式が 1 の場合は次が成立する。

命題 1.1 A を 3 次の直交行列で $|A| = 1$ を満たすとすると、1 は A の固有値である[1]。 □

証明. $|E - A| = 0$ であることを示せばよい。${}^tAA = E$ より ${}^tA(E - A) = {}^tA - E$ となるから

$$|\,{}^tA(E - A)| = |\,{}^tA - E|$$

[1]証明からわかるように、この命題は奇数次の直交行列に対して成立する。

である。これの左辺は $|A||E-A|$ に等しい。一方右辺は $|A-E|$ に等しいが、今3次の行列を考えているので $|A-E|=-|E-A|$ である。よって

$$|A||E-A|=-|E-A|.$$

さらに $|A|=1$ と仮定しているので $|E-A|=-|E-A|$ となる。よって $|E-A|=0$ である。 □

A を $|A|=1$ なる直交行列とし、$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ を1の固有ベクトルで $|a|=1$ なるもの、$L=\langle\boldsymbol{a}\rangle$（すなわち $\boldsymbol{a}$ が張る直線）とする。以下、A は直線 L を軸とする回転を表すことを示そう。

命題 1.2 L の直交補空間 $L^\perp$ は2次元であり、A で不変である（すなわち $\boldsymbol{x}\in L^\perp$ ならば $A\boldsymbol{x}\in L^\perp$）。 □

証明. $L^\perp$ が2次元であることは第11回命題1.4より従う。$L^\perp$ が A で不変であることを示すには任意の $\boldsymbol{x}\in L^\perp$ と任意の $\boldsymbol{y}\in L$ に対して $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ であることを示せばよい。$\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{a}$ （$t\in\mathbb{R}$）と書けることに注意して、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=(A\boldsymbol{x},t\boldsymbol{a})\\&=(A\boldsymbol{x},A(t\boldsymbol{a}))\quad(A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\text{ なので})\\&=(\boldsymbol{x},t\boldsymbol{a})\quad(\text{第 11 回命題 2.4})\\&=t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\\&=0\quad(\boldsymbol{x}\in L^\perp\text{ だから})\end{aligned}$$

よって確かに $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ が成り立つ。 □

$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ を $L^\perp$ の任意の正規直交基底とすると、$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{a}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底になる。よって

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

とおくと第11回命題2.3より P は直交行列であるから、$|P|=1$ または $|P|=-1$ が成り立つ。$|P|=-1$ のときは $\boldsymbol{y}_1$ と $\boldsymbol{y}_2$ を入れ替えれば $|P|=1$ となる[2]ので、以下 $|P|=1$ になるように $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$ が選ばれていると仮定する[3]。

A が定める線形写像を f と書くと、

$$\begin{pmatrix}A\boldsymbol{y}_1 & A\boldsymbol{y}_2 & A\boldsymbol{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & c & 0\\ d & e & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{1}$$

[2]あるいは $\boldsymbol{a}$ の代わりに $-\boldsymbol{a}$ を使ってもよい。
[3]要するに $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{a}$ が右手系か左手系かの違いである。

（第 3 列は $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ の帰結であり、第 3 行の二つの 0 は命題 1.2 の帰結である）となるので $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{a}$ に関する f の表現行列は

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形になる。このとき次が成り立つ。

命題 1.3 $\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$ は直交行列であり、その行列式は 1 である。 □

証明.

$$AP = P \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \tag{2}$$

となるので、第 11 回練習問題 2.5 より

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は直交行列である。よって $\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$ も直交行列である。また $|A| = |P| = 1$ なので (2) の行列式をとれば、$be - cd = 1$ を得る。 □

命題 1.3 より $\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$ は回転行列なので、(1) より f は L の周りの回転を表すことがわかる。すなわち次が得られた。

定理 1.4 3 次の直交行列で行列式が 1 であるものが定める線形写像は、原点を通るある直線を軸とする回転である。 □

行列式が -1 である直交行列に対しては次が成り立つ。

命題 1.5 A を直交行列で $|A| = -1$ を満たすものとする。対角成分のうち一つだけが -1 で残りの成分は 1 である対角行列を S とすると、積 AS も直交行列であり、$|AS| = 1$ が成り立つ。 □

証明. S も明らかに直交行列なので、第 11 回練習問題 2.5 より AS も直交行列である。また $|AS| = |A||S| = (-1)\cdot(-1) = 1$ である。 □

この命題は次数によらず正しいが、3 次の場合、S が定める線形写像は、ある平面に関する折り返しであることは明らかである。したがって、命題 1.5 より、行列式が -1 である直交行列が定める線形写像は、平面に関する折り返しとある直線を軸とする回転の合成になることがわかる。

2 具体例

次の直交行列が定める線形写像を調べよう：

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

まず $|A| = 1$ となるので、定理 1.4 より A はある直線を軸とする回転である。これの回転軸と回転角を求めよう。

固有値 1 の固有ベクトルを求めると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので回転軸 L は直線 $\{x = y = z\}$ である。そのために、まず直交補空間 $L^{\perp}$（すなわち L と直交する平面）が $\{x + y + z = 0\}$ で与えられることに注意して、$L^{\perp}$ の元として

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとると

$$A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となりこれは $-\boldsymbol{a}$ に等しいので、回転角は π である。

練習問題 2.1 次の行列が $|A| = 1$ なる直交行列であることを確かめ、その回転軸と回転角を求めよ。

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

解答例. A が直交行列で $|A| = 1$ であることの解答は省略。固有値 1 の固有ベクトルとしては

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。よって回転軸 L は直線 $\{x = z, y = 0\}$ である。（わざわざこの形に直す必要はない。）$L^{\perp}$ の元としては

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれて、

$$A\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる。（これももちろん $L^{\perp}$ の元である。）$\boldsymbol{a}$ と $A\boldsymbol{a}$ のなす角を θ とすると、

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |A\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

であり、$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるので $\pi/2$ である。よって回転角は $\pi/2$ である。 □

この解答は、どちらの向きに回転させるかまでは答えていない。これを求めるには次のようにする。（以下の説明は理解できなくてもよい。）

今の場合、回転角が $\pi/2$ であることがわかっているので $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}$ は $\mathbb{R}^3$ の直交基底である。（直交基底とは正規直交基底の条件のうち各ベクトルの長さが 1 であるという条件をはずしたもの、すなわちどの二つも直交しているという条件を満たす基底のことである。$|\boldsymbol{b}| \neq 1$ であるから正規直交基底にはならない。）このとき

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} & \sqrt{2}A\boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

なので、右ねじを $\boldsymbol{a}$ から $A\boldsymbol{a}$ の方向に回したとき、ねじは $\boldsymbol{b}$ の方向に進む。（説明終わり。）

練習問題 2.2 ベクトル $\boldsymbol{b} = {}^t(1,0,2)$ を軸とする $\pi/2$ 回転を表す行列を求めよ。($\pi/2$ 回転は 2 通りあるので両方とも求めること。) □

解答例. 直交補空間 $\langle \boldsymbol{b} \rangle^\perp$ の元としてはたとえば

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。これらは直交している。長さを揃えるために

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である。求める行列を A とすると

$$\boldsymbol{b} \overset{A}{\longmapsto} \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}_1 \overset{A}{\longmapsto} \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_2 \overset{A}{\longmapsto} -\boldsymbol{a}_1 \tag{3}$$

となるか、

$$\boldsymbol{b} \overset{A}{\longmapsto} \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}_1 \overset{A}{\longmapsto} -\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_2 \overset{A}{\longmapsto} \boldsymbol{a}_1 \tag{4}$$

となるかのいずれかである。逆に (3) または (4) を満たす A は一意的なので、(3),(4) から A を定めればよい。

(3) のとき、

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これに列基本変形を繰り返し適用して、

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/\sqrt{5} & 2/5 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 2/5 & -1/\sqrt{5} & 4/5 \end{pmatrix}$$

を得る。

同様に (4) のとき

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるのでこれに列基本変形を繰り返し適用して、

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/\sqrt{5} & 2/5 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 2/5 & 1/\sqrt{5} & 4/5 \end{pmatrix}$$

を得る。 □

（以上）