線形代数学第二　第１１回講義ノート

本多 宣博

2010年1月6日

前回は、内積が与えられたベクトル空間の正規直交基底を作り出す方法として、シュミットの直交化法を学んだ。その際に鍵となったのは、直交射影（正射影）と呼ばれる線形写像だった（前回の補題3.2）。

当面の目標は、「対称行列 A が正定値であるための必要十分条件は A のすべての固有値が正（前回定理1.2）」の証明であり、今日の内容はその準備であるが、それ自身重要である。（前回定理1.2の証明は次回で完了する予定。）

1　直交補空間

(復習) ベクトル空間 V の二つの部分ベクトル空間 W_1, W_2 で、$W_1 + W_2 = V$ かつ $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ となっているとき V は W_1 と W_2 の直和であるといい、$V = W_1 \oplus W_2$ と書いた。（これは、V の任意の元が W_1 の元と W_2 の元の和として一意的に書けることと同値だった。また、これは $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ かつ $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ とも同値だった。）

以下では、特に V に内積が与えられているとき、任意の部分ベクトル空間 W_1 に対して、別の部分空間 W_2 で $V = W_1 \oplus W_2$ を満たすもの（直交補空間）が自然に定まることを説明する。

定義 1.1 $(\cdot, \cdot)$ を V の内積、W_1 を V の部分ベクトル空間とするとき

$$W_1^{\perp} := \{\boldsymbol{x} \in V \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{y} \in W\}$$

のことを、W_1 の直交補空間という。（要するに、W_1 のどの元とも直交する元全体のこと。）　□

例 1.2 $V = \mathbb{R}^2$ 上で標準的な内積を考え、W_1 として任意の1次元部分空間（すなわち原点を通る直線）をとると、直交補空間 $W_1^{\perp}$ は W_1 と直交する直線である。　□

例 1.3 $V = \mathbb{R}^3$ 上で標準的な内積を考え、W_1 として平面

$$W_1 = \{\, {}^t(x, y, z) \in V \mid ax + by + cz = 0\}$$

をとると直交補空間 $W_1^\perp$ は ${}^t(a, b, c)$ を方向ベクトルとして持つ、原点を通る直線（W_1 と直交する）である。 □

命題 1.4 定義 1.1 の状況で、常に $V = W_1 \oplus W_1^\perp$ が成り立つ。 □

証明. W_1 への直交射影を $f : V \to W_1$ とする。このとき任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})) + f(\boldsymbol{x})$$

と書けるが、前回補題 3.2 より、任意の $\boldsymbol{y} \in W_1$ に対して

$$(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = 0$$

が成り立つので $\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) \in W_1^\perp$ である。よって $V = W_1 + W_1^\perp$ が成り立つ。直和であることを示すためには $W_1 \cap W_1^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せばよい。そこで $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_1^\perp$ を任意にとると, $\boldsymbol{x} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{x} \in W_1^\perp$ より

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$$

となる。内積の正定値性（内積の条件 (iii); 第 9 回定義 2.1 参照) よりこのような性質を持つベクトルは $\boldsymbol{0}$ のみである。よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。これは $W_1 \cap W_1^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ を意味する。よって $V = W_1 \oplus W_1^\perp$ が成り立つ。 □

練習問題 1.5 $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間 W_1 を

$$W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2w = 2x - y + 2z - 2w = 0\}$$

で定めるとき、W_1 と直交補空間 $W_1^\perp$ の基底を求めよ。 □

解答例. 与式から z と w を消去して、$z = -x$, $w = -y$ を得る。逆にこれらを満たしていれば $(x, y, z, w) \in W_1$ である。よって W_1 の任意の元は $(x, y, -x, -y)$ のかたちで書ける。

$$(x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)$$

と書けるので W_1 の基底としてはたとえば $(1, 0, -1, 0)$ と $(0, 1, 0, -1)$ がとれる。これら二つのベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とおくと、$\boldsymbol{x} \in W_1^\perp$ であるための条件は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0$ である。$\boldsymbol{x} = (x, y, z, w)$ とおけば、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow x = z, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow y = w$$

であるから、$\boldsymbol{x} = (x, y, x, y)$ と書ける。よって $W_1^\perp$ の基底としてはたとえば

$$(1, 0, 1, 0),\ (0, 1, 0, 1)$$

がとれる。 □

2　直交行列

この節では直交行列とよばれる、特殊だが重要な正則行列について学ぶ。

定義 2.1 n 次正方行列 A で、${}^tAA = E$ を満たす行列のことを、n 次直交行列という。 □

A が直交行列のとき、${}^tAA = E$ の両辺の行列式をとって

$$|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2 = |E| = 1$$

となるから、$|A| = \pm 1$ である。すなわち直交行列の行列式は 1 または -1 である。よって特に、直交行列は正則行列である。また

$${}^tAA = E \Longleftrightarrow {}^tA = A^{-1} \Longleftrightarrow A\,{}^tA = E$$

であるから、直交行列の定義としては、$A\,{}^tA = E$ としても ${}^tAA = E$ としても同じことである。

例 2.2 $A = E$ とすると ${}^tEE = E$ であるから E は直交行列である。また、任意の数 θ に対して

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は（2次の）直交行列である。また、

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

は（3次の）直交行列である。

命題 2.3 A を n 次正方行列とし、その列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$、行ベクトルを $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n$ とする。このとき「A が直交行列」$\Leftrightarrow$ 「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底」 $\Leftrightarrow$ 「${}^t\boldsymbol{a}'_1, {}^t\boldsymbol{a}'_2, \cdots, {}^t\boldsymbol{a}'_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底」が成り立つ。ここで $\mathbb{R}^n$ の内積としては標準内積を考える。 □

証明. $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ より

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

なので

$$
{}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_n \\ {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_2 & \cdots & {}^t\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}
$$

となる。A が直交行列であるための条件はこれが単位行列に等しいことなので ${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$ と同値である。これは $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ と同値なので、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交基底であることと同値である。よって一つめの「$\Leftrightarrow$」が証明された。二つめの「$\Leftrightarrow$」を示すには、${}^tAA = E$ であることと $A\,{}^tA = E$ が同値であることに注意して ${}^tA$ に一つめの「$\Leftrightarrow$」を適用すればよい。 □

命題 2.3 より、直交行列は「正規直交基底を並べて得られる行列」ということができる。以前述べたように正規直交基底は無数に存在するので、直交行列も無数に存在する。

命題 2.4 n 次正方行列 A が直交行列であるためには、A が定める線形写像が $\mathbb{R}^n$ の標準内積を保つこと、すなわち任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことが必要十分条件である。 □

証明. まず A が直交行列であることを仮定すると、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) &= {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{y} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}E\boldsymbol{y} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

となるから A は $\mathbb{R}^n$ の標準内積を保つ。逆に A が標準内積を保つとき、上の計算より任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ が成り立つ。そこで特に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$（$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は標準基底）とすれば、${}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{y}$ は ${}^tAA$ の第 (i, j) 成分になるので、${}^t\boldsymbol{e}_i\,{}^tAA\boldsymbol{e}_j = {}^t\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j (\forall i, j)$ は ${}^tAA = E$ と同値である。よって A は直交行列である。 □

練習問題 2.5 (1) A が直交行列のとき、逆行列 A^{-1} も直交行列であることを示せ。(2) A, B が直交行列のとき、積 AB も直交行列であることを示せ。

解答例. (1) ${}^tAA = E$ の逆行列をとって $A^{-1}({}^tA)^{-1} = E$ となる。ここで $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ であるから $A^{-1} \cdot {}^t(A^{-1}) = E$ となる。これは A^{-1} が直交行列であることを意味する。(2) ${}^tAA = {}^tBB = E$ であるから

$$
{}^t(AB)(AB) = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBEB = {}^tBB = E
$$

となる。これは AB が直交行列であることを意味する。 □

3　2次の直交行列

2次の直交行列は次のように容易に分類が可能である：

命題 3.1 2次の直交行列は以下の2つのいずれかの形である。

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

□

もちろん R_θ は反時計回りに角度 θ だけ回転させる行列であり、S_θ は直線 $y = \tan(\theta/2)$ に関する折り返し行列である。$|R_\theta| = 1$ であるのに対し、$|S_\theta| = -1$ であることに注意する。

証明.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

に対して

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

なので ${}^tAA = E$ は

$$a^2+b^2 = 1,\ c^2+d^2 = 1,\ ac+bd = 0$$

と同値である。初めの2式はベクトル (a,b) と (c,d) の長さが1であることを意味し、最後の式はこれらが直交することを意味する。$(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと、(c,d) が (a,b) を反時計回りに90度回転させたものであるとき、$(c,d) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ となり $A = R_\theta$ となる。また (c,d) が (a,b) を時計回りに90度回転させたものであるとき、$(c,d) = (\sin\theta, -\cos\theta)$ となり $A = S_\theta$ となる。 □

練習問題 3.2 R_θ が実数の固有値（実固有値という）をもつような θ とそのときの固有値・固有ベクトルを求めよ。また S_θ の固有値とその固有ベクトルを求めよ。 □

解答例. R_θ の固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - R_\theta| &= (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ &= \lambda^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda + 1 \end{aligned}$$

となる。これの判別式は

$$\cos\theta^2 - 1$$

であるから、固有値が実数になるための条件は $\cos\theta^2 = 1$, すなわち $\theta = 0, \pi$ である。$\theta = 0$ のときは $R_\theta = E$ であるから固有値は 1 であり、ゼロベクトル以外の任意のベクトルが固有ベクトルである。$\theta = \pi$ のときは $R_\theta = -E$ であるから固有値は -1 であり、ゼロベクトル以外の任意のベクトルが固有ベクトルである。

一方、S_θ の固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - R_\theta| &= (\lambda - \cos\theta)(\lambda + \cos\theta) - \sin^2\theta \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

となるから固有値は $1, -1$ である。固有ベクトルを (x, y) とすると

$$(\lambda - \cos\theta)x - \sin\theta \cdot y = 0, \quad \lambda = \pm 1$$

なので、$\sin\theta \neq 0$ のとき（すなわち $\theta \neq 0, \pi$ のとき）固有ベクトルとして

$$(\sin\theta, \lambda - \cos\theta), \quad \lambda = \pm 1$$

がとれる。このベクトルの傾きは

$$\frac{\pm 1 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

であるが、半角の公式を使えば $\lambda = 1$ のとき $\tan(\theta/2)$, $\lambda = -1$ のとき $-(\tan(\theta/2))^{-1}$ となることがわかる。しかし実際にはこれは、S_θ が直線 $y = \tan(\theta/2)x$ に関する折り返しであることから、初めから明らかなことである。

$\sin\theta = 0$, すなわち $\theta = 0, \pi$ のときは S_θ は x 軸に関する折り返しなので、1 の固有ベクトルとしては $(1, 0)$ が、-1 の固有ベクトルとしては $(0, 1)$ がとれる。
□

念のため、S_θ が直線 $y = \tan(\theta/2)$ に関する折り返し行列であることを証明しておこう。S_θ は直交行列であるから長さを保つので、S_θ が定める線形写像がどのような写像であるかを知るには、x 軸となす角 α がどのように変化するかだけわかればよい。ここで

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、任意の θ に対して $S_\theta = R_\theta S_0$ と書けることに注意すれば、x 軸となす角 α は

$$\alpha \overset{S_0}{\longmapsto} -\alpha \overset{R_\theta}{\longmapsto} -\alpha + \theta$$

と変化する。これを

$$\frac{\theta}{2} + \left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \xmapsto{S_\theta} \frac{\theta}{2} - \left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)$$

と読めば S_θ が直線 $y = \tan(\theta/2)$ に関する折り返しであることがわかる。

(以上)