線形代数学第二　第１０回講義ノート

本多 宣博

2009 年 12 月 16 日

1　内積と行列に関する補足事項

前回は、n 次対称行列 A が与えられたとき、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y} \tag{1}$$

とおくと、内積の条件 (i), (ii)（対称性と線形性）は満たされるが、条件 (iii)（正定値性）は必ずしも成立しないこと、そして (iii) を満たすような行列のことを**正定値**行列といった。もう一つだけ、内積の重要な例を与えておく。

例 1.1 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を正の数とし、n 次対称行列 A として対角行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

として得られるものを考える。この場合, $\boldsymbol{x} = {}^t(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ に対して

$${}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

となるので、正定値であるための必要十分条件は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がすべて正であることである。(理由：ある i に対して $\lambda_i \leq 0$ であれば、$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) \leq 0$ となる。よって正定値でない。逆にすべての $\lambda_i > 0$ であれば各 i に対して $\lambda_i x_i^2 \geq 0$ となるから常に ${}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} \geq 0$ であり、もし ${}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} = 0$ となっていれば任意の i に対して $x_i = 0$, したがって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。）この例はずっと後で用いる。 □

上の (1) が正定値であるための（A に関する）判定条件として次が成り立つ：

定理 1.2 A が対称行列のとき、(1) が正定値であるためには、A の固有値がすべて正であることが必要十分である。 □

対称行列が与えられたときにそれが正定値かどうかを定義に従って調べるのは面倒なことが多いが、この定理によれば、固有値さえ求まれば正定値かどうかがわかることになる。この定理の証明には少し準備が必要なのでだいぶ後になってから証明する。対角行列の場合（すなわち例 1.1 の A のとき）定理 1.2 が成立することは明らかであることに注意しよう。

2　内積と正規直交基底

$\mathbb{R}^n$ では、標準基底という特別な基底があった。これを特別な例として含む重要な基底として、正規直交基底というものがある：

定義 2.1 内積 $(\cdot,\cdot)$ をもった n 次元ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ が**正規直交基底**であるとは、

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$$

を満たすときをいう。ここで δ_{ij} はクロネッカーデルタ、すなわち $i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$, $i\neq j$ のとき $\delta_{ij}=0$ である。 □

例 2.2 $V=\mathbb{R}^n$, $(\cdot,\cdot)$ を標準内積とすると標準基底は正規直交基底である。□

例 2.3 θ を任意の実数とする。$\mathbb{R}^2$ の二つのベクトル

$$\boldsymbol{e}_1:=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2:=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

は標準内積に関して正規直交基底である。（なぜでしょう？）このように、標準基底以外にも正規直交基底はいくらでも存在する。 □

練習問題 2.4 $V=\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1:=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2:=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3:=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

が標準内積に関して正規直交基底であることを示せ。 □

解答例.

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2=1,$$

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+0\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=0,$$

のようにして、各 i, j に対して $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ となることが確かめられる。(内積の対称性よりすべての組み合わせに対して確かめる必要はないことに注意。) □

正規直交基底の定義に関して一つ補足しておく。定義 2.1 ではまず $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が基底であることを仮定したが、実際にはこれを仮定しなくても、$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ さえ満たしていれば自動的に基底になる：

命題 2.5 V を n 次元ベクトル空間とするとき、n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ を満たしていれば $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は V の基底になる。 □

証明. $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が一次独立であることを示せばよい。

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$$

とすると、$\boldsymbol{e}_j$ との内積をとれば

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$$

となる。これが 0 なので $a_j = 0$ となる。j は任意なので $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は一次独立である。 □

3 シュミットの直交化法

正規直交基底を作り出す重要な方法として、次がある。

命題 3.1 V を n 次元ベクトル空間、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底とするとき、V の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ で以下を満たすものが存在する：

$$\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle, \tag{2}$$

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle, \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-1} \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1} \rangle \tag{5}$$

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle. \tag{6}$$

□

式を見ただけでは意味がわかりにくいと思われるので補足しておく。まず与えられたデータは V の基底 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ である。これらから、一つずつ次元があがっていく部分ベクトル空間の列

$$\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \subset \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subset \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle \subset \cdots \subset \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle = V$$

ができる。(2) は初めのベクトル空間 $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ の正規直交基底として $\boldsymbol{e}_1$ がとれ、(3) は次のベクトル空間 $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の正規直交基底として $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ がとれ、最後に (6) は $V = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ の正規直交基底として $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ がとれることを意味している。この最後の部分から特に、**任意のベクトル空間に対して正規直交基底が存在する**ことがわかる。

命題 3.1 を証明するために、次の補題を用意する：

補題 3.2 W を V の m 次元部分ベクトル空間、$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ を W の正規直交基底とする。このとき写像 $f : V \to W$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$$

で定めると任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = 0$ が成り立つ。□

証明. 任意の j に対して $(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_j) = 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_j) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j) - (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_j) \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j) - \left(\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right) \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)\delta_{ij} = 0
\end{aligned}$$

となるので確かに成立する。 □

上の補題の写像 f のことを、W への**直交射影**という。

これから補題 3.2 を使って命題 3.1 の証明を与えるが、この証明は正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の求め方を具体的に与えているので非常に重要である。

命題 3.1 の証明. まず $\boldsymbol{e}_1$ としては、

$$\boldsymbol{e}_1 := \frac{\boldsymbol{x}_1}{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)^{\frac{1}{2}}}$$

とおけば明らかに $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ が成り立つ。そして $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1$ なので $\boldsymbol{e}_1$ は定理の条件を満たす。

次に $\boldsymbol{e}_2$ をとるために、まず

$$\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 \tag{7}$$

とおくと、明らかに $\boldsymbol{e}_2' \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ かつ $\boldsymbol{e}_2' \neq \boldsymbol{0}$ である。また $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$ は、$\boldsymbol{x}_2$ の、$\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ への直交射影なので補題 3.2 より $(\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_1) = 0$ となる。しかしこのままでは $(\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_2') = 1$ とは限らないので $\boldsymbol{e}_1$ を定めたときと同様、

$$\boldsymbol{e}_2 := \frac{\boldsymbol{e}_2'}{(\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_2')^{\frac{1}{2}}}$$

とおけば $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$ となる。よって $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ の正規直交基底である。

次に、$\boldsymbol{e}_3$ をとるためにまず

$$\boldsymbol{e}_3' := \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \tag{8}$$

と定めると、明らかに $\boldsymbol{e}_3' \in \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ かつ $\boldsymbol{e}_3' \neq \boldsymbol{0}$ である。また $(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$ は、$\boldsymbol{x}_3$ の、$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ への直交射影なので補題3.2 より $(\boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_2) = 0$ となる。そこで $\boldsymbol{e}_2$ のときと同様

$$\boldsymbol{e}_3 := \frac{\boldsymbol{e}_3'}{(\boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_3')^{\frac{1}{2}}}$$

とおけば $(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1$ であり、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の正規直交基底になる。

次に $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i \rangle$ の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_i$ で各 $j \leq i$ に対して $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_j \rangle$ を満たすものがとれたとする。このとき、

$$\boldsymbol{e}_{i+1}' := \boldsymbol{x}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j \tag{9}$$

と置くと, 仮定から明らかに $\boldsymbol{e}_{i+1} \in \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i+1} \rangle$ かつ $\boldsymbol{e}_{i+1}' \neq \boldsymbol{0}$ であり、直交射影の性質より任意の k に対して $(\boldsymbol{e}_{i+1}', \boldsymbol{e}_k) = 0$ となる。そこで

$$\boldsymbol{e}_{i+1} := \frac{\boldsymbol{e}_{i+1}'}{(\boldsymbol{e}_{i+1}', \boldsymbol{e}_{i+1}')^{\frac{1}{2}}}$$

とおけば $(\boldsymbol{e}_{i+1}, \boldsymbol{e}_{i+1}) = 1$ となるので $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{i+1}$ は $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i+1} \rangle$ の正規直交基底になる。 □

例 3.3 $V = \mathbb{R}^3$ とし、基底として

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとり、これらにシュミットの直交化法を適用してみる。まず $\boldsymbol{e}_1$ としては, $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = 2$ に注意して

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。次に $\boldsymbol{e}_2'$ として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2' &= \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $(\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_2') = 3/2$ となるので

$$\boldsymbol{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

となる。次に

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_3' &= \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 - 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

となる。以上により求める正規直交基底は

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

である。 □

練習問題 3.4 $V = \mathbb{R}^3$ の基底

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

にシュミットの直交化法を適用して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ。

やり方は上の練習問題と全く同じなので解答のみ記す。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

(以上)