線形代数学第二　第 9 回講義ノート

本多 宣博

2009 年 12 月 9 日

1　対角化の仕方（続き）

この節ではまず前回の最後に与えた対角化の計算方法が正しいことの証明を与える：

命題 1.1 A を n 次正方行列、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をその固有値、$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ をそれぞれの固有ベクトルとする。$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が相異なるとする。このとき $P = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ とおけば P は正則行列であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

が成り立つ。 □

証明. 固有値と固有ベクトルの定義から、各 i に対して

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

が成り立つ。これらを並べて書けば

$$(A\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2, \cdots, A\boldsymbol{p}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$

となる。これを行列の形で書けば

$$A(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。よって $P = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ とおけば

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。よって P が正則であることが示されれば、両辺に左から P^{-1} をかけることにより (4) を得る。

P が正則であることを示すためには、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が一次独立であることを示せばよい。これを帰納法で示す。まず $\boldsymbol{p}_1$ は $\boldsymbol{0}$ でない。そこで $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{i-1}$ が一次独立であったとし、

$$a_1\boldsymbol{p}_1 + a_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + a_i\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

とおく。$a_i \neq 0$ としてよい。両辺に A を掛ければ、$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i\boldsymbol{p}_i$ より

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + a_i\lambda_i\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

を得る。一方 (2) を $\boldsymbol{p}_i$ に関して解いて

$$\boldsymbol{p}_i = -\frac{a_1}{a_i}\boldsymbol{p}_1 - \frac{a_2}{a_i}\boldsymbol{p}_2 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}\boldsymbol{p}_{i-1}$$

となる。これを (3) に代入して整理すれば

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_i)\boldsymbol{p}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_i)\boldsymbol{p}_2 + \cdots + a_{i-1}(\lambda_{i-1} - \lambda_i)\boldsymbol{p}_{i-1} = \boldsymbol{0}.$$

を得る。ここで $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{i-1}$ は一次独立としていたので

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_i)\boldsymbol{p}_1 = a_2(\lambda_2 - \lambda_i) = \cdots = a_{i-1}(\lambda_{i-1} - \lambda_i) = 0$$

となる。さらに、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は相異なると仮定していたので

$$\lambda_1 - \lambda_i,\ \lambda_2 - \lambda_i,\ \cdots,\ \lambda_{i-1} - \lambda_i$$

はどれも 0 でないから、$a_1 = a_2 = \cdots = a_{i-1} = 0$ となる。よって (2) より $a_1\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$ となり、よって $a_1 = 0$ となる。以上より $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_i$ は一次独立であることが示せた。 □

前回注意したように、一般に行列の固有値は実数とは限らない。また、すべての固有値が実数であったとしても、相異なるとは限らない。そのような場合、対角化は可能でない場合がある。しかし、上の証明の前半から、次が成立することに注意する。

命題 1.2 A を n 次正方行列とし、$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ を A の固有値で一次独立である（すなわち $\mathbb{R}^n$ の基底をなす）とする。このとき $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とし、$P = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ とおけば、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

が成り立つ。 □

また、命題 1.1 の証明の後半で示した次の事実もそれ自身重要なので、命題の形で述べておく。

命題 1.3 A を n 次正方行列とし、$\lambda_1, \cdots, \lambda_i$ を A の固有値で相異なるとする。（$i = n$ であるとは仮定しない。）$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_i$ をそれぞれ $\lambda_1, \cdots, \lambda_i$ の固有ベクトルとすると、$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_i$ は一次独立である。 □

練習問題 1.4 次の行列 A を対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

解答例. A の固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 4 & -2 \\ -3 & \lambda-5 & 3 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

となるから固有値は $\lambda = 0, 2, -1$ である。それぞれの固有ベクトルは

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。よって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。 □

固有値の話題はこれでひとまず一段落。

2 ベクトル空間の内積

高校までで、$\mathbb{R}^2$ の内積が

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = a_1 a_2 + b_1 b_2 \tag{5}$$

で定義され、これらのベクトルのなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{((a_1, b_1), (a_2, b_2))}{\sqrt{a_1^1 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

となることを学んだ[1]。この節では、上の内積 (5) を特別な場合として含む、より一般の内積の概念を学ぶ。

定義 2.1 ベクトル空間 V の**内積**とは、$V \times V$ から $\mathbb{R}$ への写像 $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$（すなわち、どんな二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対しても数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が与えられている状態）で、次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものをいう。
(i) 次の意味で対称である：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

(ii) 次の意味で線形である：

$$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \in V,$$
$$(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \forall c \in \mathbb{R}.$$

(iii) 次の意味で**正定値**である：

「任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ であり、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときに限る。」 □

[1] $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$ という記号で習った人もいるかもしれない。

性質 (ii) より、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0$ となる（すなわち零ベクトルとの内積はいつでも 0 となる）。実際、

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (0 \cdot \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = 0$$

となるからである。（一つ目の等号で (i) を使い、3 つめの等号で (ii) を使った。）

上の定義はかなり抽象的で意味がとらえにくいかもしれないが、あとで、（任意の線形写像が行列を使って表すことができたのと同様に）任意の内積を行列を使って表すことができることをみる。

まず上の内積 (5) が定義 2.1 を満たすことを確かめよう。性質 (i)（対称性）は (5) が (a_1, b_1) と (a_2, b_2) を入れ替えても変わらないことからわかる。性質 (ii) は、$\boldsymbol{x}_1 = (a_1, b_1), \boldsymbol{x}_2 = (a_2, b_2), \boldsymbol{y} = (a, b)$ すれば

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= ((a_1 + a_2, b_1 + b_2), (a, b)) \\ &= (a_1 + a_2)a + (b_1 + b_2)b \\ &= (a_1 a + b_1 b) + (a_2 a + b_2 b) \\ &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

また $\boldsymbol{x} = (a, b), \boldsymbol{y} = (a', b')$ とすれば

$$\begin{aligned}(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= ((ca, cb), (a', b')) \\ &= caa' + cbb' \\ &= c(aa' + bb') \\ &= c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となることから確かに成立していることがわかる。また正定値性 (iii) は、$\boldsymbol{x} = (a, b)$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = ((a, b), (a, b)) = a^2 + b^2 \geq 0$$

であり、$a^2 + b^2 = 0$ ならば $(a, b) = (0, 0)$ となることからわかる。以上で (5) が定義 2.1 を満たしていることがわかった。

例 2.2 内積 (5) を一般化して、一般の n に対して $V = \mathbb{R}^n$ 上で,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して[2]

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \tag{6}$$

とおくと $n = 2$ のときと同じようにして (i), (ii), (iii) が成り立つことがわかる。この内積のことを、$\mathbb{R}^n$ の**標準内積**という。$\mathbb{R}^n$ 上ではこの内積を考えることが多い。(6) は行列のかけ算として

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{7}$$

と書けることに注意する[3]。 □

例 2.3 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2)$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 \tag{8}$$

とおく。これが $V = \mathbb{R}^2$ の内積であることを示そう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと (8) は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y} \tag{9}$$

と書ける。このことから、定義 2.1 の性質 (ii) を満たすことは明らか。また (i)（対称性）については, ${}^tA = A$ に注意して

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{y} A \boldsymbol{x} = {}^t({}^t\boldsymbol{y}\, A \boldsymbol{x}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\, {}^t({}^t\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\, {}^tA \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{10}$$

となるので成立する。また (iii)（正定値性）については

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 2 x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 2 x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\end{aligned}$$

となるので $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ は常に 0 以上である。また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ とすると $x_1 - x_2 = x_2 = 0$ となるので $x_1 = x_2 = 0$. よって (iii) も満たされる。 □

[2] 以下、都合によりベクトルは縦ベクトルの形で書く。（スペースをとるという欠点がある以外、たいていは縦ベクトルの形で書いた方が便利。）

[3] ${}^t\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ の転置行列。すなわち ${}^t\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$.

この例のように、A を n 次正方行列とするとき、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y} \tag{11}$$

とすれば、内積の条件 (ii) が満たされる。しかし一般に対称性 (i) は満たされない。(10) からわかるように、対称性が成立するための必要十分条件は A が対称行列（すなわち ${}^tA = A$）であることである。しかし A が対称行列であったとしても、内積の定義 (iii)（正定値性）は満たされるとは限らない。たとえば、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は対称行列であるが、

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2) \leq 0$$

となるから、A は正定値であることからはほど遠い。

定義 2.4 対称行列 A は、(11) で定義される $(\cdot, \cdot)$ が正定値である（すなわち内積の条件 (iii) を満たす）とき、**正定値**であると言われる。 □

たとえば、例 2.3 の対称行列 A は正定値である。

練習問題 2.5 次の対称行列 A は正定値でないことを示せ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解答例. 今度は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

となるからたとえば $(x_1, x_2) = (2, 1)$ のとき値は -1 であるから A は正定値でない。 □

(以上)