線形代数学第二　第８回講義ノート

本多 宣博

2009 年 12 月 2 日

前回は、基底をうまく選ぶことにより、線形写像の表現行列を簡単な形（対角行列）にすることを考えた。今回は、その方法を具体的に与える。

1　行列の固有値と固有ベクトル

A を n 次正方行列とする。

定義 1.1 A の **固有ベクトル**とは、零ベクトルではない $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1}$$

となるもののことをいう。（すなわち、A で写したときに定数倍になるベクトルのこと。）また、(1) に出てくる数 λ のことを、$\boldsymbol{x}$ の**固有値**[1]という。 □

例 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合、具体的計算ですぐにわかるように

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となるので $(1, -1)$ は A の固有ベクトルである。そしてその固有値は 4 である。一方、たとえば

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

なので $(1, 0)$ は A の固有ベクトルではない。 □

[1] A の固有値ということも多い。

行列が与えられたときその固有ベクトルと固有値を求めるにはどうしたらよいだろうか？

命題 1.3 $\boldsymbol{x}$ を n 次正方行列 A の固有ベクトル、λ をその固有値とすると、λ は方程式

$$|\lambda E - A| = 0 \tag{2}$$

を満たす。逆に λ が方程式 (2) の解のとき、λ は A の固有値である。より詳しく、$r = \mathrm{rank}(\lambda E - A)$ とすると、λ を固有値にもつ固有ベクトルで一次独立なものがちょうど $(n-r)$ 個とれる。 □

証明の前に、(2) が成り立つとき、$\lambda E - A$ は正則でないから、$\mathrm{rank}(\lambda E - A) < n$ となることに注意しよう。

命題 1.3 の証明. $\boldsymbol{x}$ を A の固有ベクトル、λ をその固有値とすると、まず (1) を移項して

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

となる。もし $\lambda E - A$ が正則だったとすると (3) の左から逆行列 $(\lambda E - A)^{-1}$ を掛ければ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり、固有ベクトルは零ベクトルではないという定義に反するので、$\lambda E - A$ は正則でない。したがって (2) が成り立つ。すなわち A の固有値は方程式 (2) の解である。逆に λ が方程式 (2) の解のとき、行列 $\lambda E - A$ は正則でなくなるから、その階数を r とすると、連立一次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $(n-r)$ 個の一次独立な解を持つ。よって A はちょうど $(n-r)$ 個の一次独立な固有ベクトルをもつ。 □

定義 1.4 行列 A に対し、(2) に出てくる多項式 $|\lambda E - A|$ のことを、A の**固有多項式**（または**特性多項式**）という。 □

行列 $\lambda E - A$ には対角成分にのみ λ が一つずつ入るので、固有多項式はいつでも (λ に関する）n 次の多項式であることに注意しよう。したがって、「n 次方程式は重複度も考慮に入れて数えればちょうど n 個の解をもつ」という一般的な定理（「代数学の基本定理」という）により、n **次正方行列は重複度も込めれば**[2]n **個の固有値をもつ**ことになる。ただし、固有多項式の解は実数とは限らないから、固有値は（たとえ行列 A の成分がすべて実数であったとしても）

[2]すなわち固有多項式がたとえば $(\lambda-1)^2(\lambda+3)$ となっていれば、固有値は $1, 1, -3$ の 3 つであると数える。

実数とは限らない。しかしこの講義では複素数を固有値に持つ場合[3]は基本的には扱わない。

例 1.5 例 1.2 で考えた行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合、固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - 9 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

となる。よって A の固有値は 4 と -2 である。固有ベクトルを求めるためには

$$4E - A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad -2E - A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

より 4 を固有値に持つ固有ベクトルとしては $(1, -1)$ がとれ、-2 を固有値に持つ固有ベクトルとしては $(1, 1)$ がとれることがわかる。

練習問題 1.6 前回例 2.3 で与えた行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

の場合に固有多項式を計算し、固有値と固有ベクトルを求めよ。

解答例. 固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

[3]たとえば行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は $\lambda^2 + 1$ になるので固有値は $\pm i$ である。

となるので固有値 λ は $1, 2, 3$ である。

$\lambda = 1$ のとき

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

なので

$$(\lambda E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2y \\ -2x + 4y - z \end{pmatrix}$$

となる。これより解は $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$ の定数倍であることがわかるから、$\lambda = 1$ の固有ベクトルとして $(-1, 0, 2)$ がとれる．同様に $\lambda = 2, 3$ のときに方程式

$$(\lambda E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて、$\lambda = 2$ の固有ベクトルとして $(0, 0, 1)$, $\lambda = 3$ の固有ベクトルとして $(-1, -1, 2)$ がとれることがわかる。 □

この例で求めた 3 つの固有ベクトルは、前回例 2.3 で選んだ $\mathbb{R}^3$ の基底であることに注意しよう。

2 行列の対角化

対角行列とは、正方行列で対角成分以外はすべて 0 であるもののことをいった。たとえば

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は対角行列であるが、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は対角行列でない。

定義 2.1 n 次正方行列 A に対して、n 次正則行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、A は P で**対角化**されるという。 □

対角化がありがたいのは次の命題による。(証明は前回の命題2.2から明らか。)

命題 2.2 A が P で対角化されているとき、P の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ とすれば、A が定める線形写像の、$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ に関する表現行列は対角行列 $P^{-1}AP$ である。 □

実際に対角化をどう行うかは次節に回して、対角化の結果得られる対角行列 $P^{-1}AP$ の対角成分には A の固有値が並ぶことを示す：

命題 2.3 A を n 次正方行列、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をその固有値全体とする。(相異なるとは仮定しない。) このとき $P^{-1}AP$ が対角行列ならば、その対角成分の集合は $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ である。 □

証明. 示すべき主張は、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

(書いていない成分は 0) とするとき $\{a_1, \cdots, a_n\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ であることである。

そのためにまず任意の行列 A と任意の正則行列 P に対して A の固有多項式と $P^{-1}AP$ の固有多項式は等しいことを示す。一般に $|AB| = |A||B|$ であったことを思い出して、$P^{-1}AP$ の固有多項式は

$$\begin{aligned} |\lambda E - P^{-1}AP| &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\ &= |P^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |P| \\ &= |P^{-1}| \cdot |P| \cdot |\lambda E - A| \\ &= |P^{-1}P| \cdot |\lambda E - A| \\ &= |E| \cdot |\lambda E - A| \\ &= |\lambda E - A| \end{aligned}$$

となるので確かに A の固有多項式と等しい。

一方、対角行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - a_n \end{vmatrix} = (\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n)$$

となる。これが A の固有多項式と等しいので、A の固有値全体は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ となる。よって $\{a_1, \cdots, a_n\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ が成り立つ。 □

3 対角化の計算方法

ここでは実際の対角化の仕方を説明する。A を n 次正方行列とする。A を対角化するには次のように計算する。

1. A の固有多項式を求め、固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を計算する。（ここではすべての固有値が相異なる場合のみ考える。）

2. 各固有値 λ_i の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ を求める。

3. $P = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ とおけば、P は正則行列であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

が成り立つ。これで A が対角化された。（この最後の部分が常に正しいことは次回証明する。）

例 3.1 例 1.2 で考えた行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合、例 1.5 で計算したように固有値は $4, -2$ であり、固有ベクトルとしてそれぞれ $(1, -1)$ と $(1, 1)$ がとれた。よって上の計算方法から、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。

練習問題 3.2 例 1.6 の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ。

解答例. 例 1.6 で計算したように A の固有値は $3, 2, 1$ であり、それぞれの固有ベクトルとして $(-1, -1, 2)$, $(0, 0, 1)$, $(-1, 0, 2)$ がとれるので

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これが前回例 2.3 でやったことの種明かしである。

注意 3.3 固有値は A のみから定まるが、固有ベクトルの取り方には定数倍の任意性がある[4]ので、A を対角化する行列 P は A から一意的には定まらない。

(以上)

[4]たとえば $(1, -1)$ が A の固有ベクトルならば、$(2, -2)$ も固有ベクトル。