線形代数学第二　第 7 回講義ノート

本多 宣博

2009 年 11 月 25 日

今日の内容は行列とベクトルがたくさん出てきてややこしく感じられるかもしれませんが、前回の内容（ベクトルの成分表示と基底の変換行列）がわかっていさえすれば、一つ一つ丹念に式を追っていくだけで理解できるはずです。（しかし丹念に式を追うことなしに理解することは不可能です。）

1　線形写像の表現行列

線形写像のもっとも重要な例は、$m \times n$ 行列 A が定める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

であったことを思い出そう（第 1 回例 2.4）[1]。

一般のベクトル空間の間の線形写像も次のように行列を使って表すことができる。V, W をベクトル空間、$\dim V = n$, $\dim W = m$ とし、

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n,$$
$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m,$$

をそれぞれ V, W の基底とする。まず、線形写像 $f : V \to W$ を与えることと、基底の行き先 $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ を与えることは同値であることに注意しよう。

[1]実際には、以下の議論からわかるように、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への <u>任意の</u> 線形写像はこのようにして得られる。

実際、f を線形写像とすると任意の元

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$$

に対して、<u>線形性から</u>

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{e}_i) \tag{2}$$

と書けるので f は $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ によって決まる。逆に $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ を任意に与えておけば、(2) によって写像 $f : V \to W$ が定まり、それは線形になる。線形写像 (1) の場合は $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ はすなわち A の列ベクトルに他ならない。後のために (2) を

$$f(\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書き換えておく。

各 $f(\boldsymbol{e}_i)$ を $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の一次結合として表しておく：

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \boldsymbol{u}_j = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n) \tag{4}$$

すなわち前回の言葉で言えば、ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

は $f(\boldsymbol{e}_i)$ の、$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ に関する成分である。(4) を (3) に代入すれば

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= (f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{j1} \boldsymbol{u}_j, \cdots, \sum_{j=1}^{m} a_{jn} \boldsymbol{u}_j \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

となる[2]。そこで (5) に出てきた $m \times n$ 行列を A とおくと

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

と書ける。基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を使って書けば

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xmapsto{f} (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

である。これは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を成分にもつベクトルが、f によって

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を成分に持つベクトルに写されることを意味する。すなわち f という線形写像は、実は行列 A を掛けるという写像とみなせることがわかった。

定義 1.1 線形写像 $f : V \to W$ から上のようにして定まる行列 A、すなわち

$$(f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A \tag{7}$$

によって定まる行列 A のことを、基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ および $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ に関する f の**表現行列**という。 □

例 1.2 $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, A : $m \times n$ 行列とし、 $f : V \to W$ を A で定まる線形写像とする。$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ および $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ をそれぞれ V, W の標準基底とすると $f(\boldsymbol{e}_i) \in \mathbb{R}^m$ は A の第 i 列に他ならないので、f の標準基底に関する表現行列は A そのものである。(標準基底なので $(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$ は単位行列になることに注意しよう。) □

[2]特に最後の等号は各自確認してしっかり納得しておくこと。

2　基底の変換と表現行列

前回の２節では基底の変換行列を学んだ。これは２つの基底の間の関係を表す行列であった。具体的には、二つの基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ と $\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ の変換行列 P は

$$(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\, P \tag{8}$$

で定まる行列だった。基底の変換行列は常に正則行列であったことを思い出そう（前回命題2.7)。ここでは、基底を取り替えたときに、線形写像の表現行列がどう変わるかを調べる。

命題 2.1 $f : V \to W$ を n 次元ベクトル空間 V から m 次元ベクトル空間 W への線形写像とする。

$$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \text{ および } \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$$

をそれぞれ V, W の基底とする。P を m 次の正則行列、Q を n 次の正則行列とし、V の基底を

$$(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P, \tag{9}$$

$$(\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_m) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)Q \tag{10}$$

で定める。（すなわち P, Q は基底の変換行列。）このとき、$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ および $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ に関する f の表現行列を A, そして $\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ および $\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_m$ に関する f の表現行列を A' とすると A と A' の間には (f によらず）次の関係式がある：

$$A' = Q^{-1}AP.$$

証明.（初めは難しく感じられるかもしれないが）使うのは線形性と基底の変換行列の定義式 (8) と表現行列の定義式のみである。まず表現行列の定義式 (7) より

$$(f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A, \tag{11}$$

$$(f(\boldsymbol{e}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}'_n)) = (\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_m)A' \tag{12}$$

が成り立つ。一方、(9) の両辺の各ベクトルに f をあてて、

$$(f(\boldsymbol{e}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}'_n)) = (f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n))P,$$

を得る。（ここで f の線形性を使った。）これを (11) に代入して

$$(f(\boldsymbol{e}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}'_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)AP. \tag{13}$$

一方で (10) を (12) に代入して

$$(f(\boldsymbol{e}'_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}'_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)QA'. \tag{14}$$

(13) と (14) より

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)AP = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)QA'.$$

したがって係数を比較して $AP = QA'$ を得る。よって $A' = Q^{-1}AP$ となる。□

特に $V = W$ の場合は次にようになる。(特にこの場合がよく使われる。)

命題 2.2 $f : V \to V$ を n 次元ベクトル空間 V から V への線形写像,

$$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$$

を V の基底とする。P を n 次の正則行列とし、V の別の基底を

$$(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P, \tag{15}$$

で定める。このとき、$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関する f の表現行列を A, そして $\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ に関する f の表現行列を A' とすると A と A' の間には (f によらず) 次の関係式がある：

$$A' = P^{-1}AP.$$

証明. $Q = P$ であるから命題 2.1 より明らか。 □

命題 2.2 は次のように使う。1 節で見たように、任意の線形写像 $f : V \to V$ は、V の基底を一つ与えれば行列のかけ算で表すことができた。V の基底の取り方は無数にあるが、命題 2.2 は基底を取り替えたときに表現行列がどう変わるかを表している。f の性質を調べるのに、うまい基底を選んで表現行列ができるだけ簡単な形になるように（すなわち $P^{-1}AP$ ができるだけ簡単な形になるように）しておくと状況が著しくわかりやすくなる。

例 2.3 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

で定まる線形写像とする。すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x+2y \\ 3y \\ 2x-4y+2z \end{pmatrix}$$

である。この写像はこのままではどんな写像かよくわからないが、$\mathbb{R}^3$ の基底として

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

を選ぶと、この基底に関する f の表現行列は対角行列

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。すなわち基底 (16) を使えば f は非常に単純な写像

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3x' \\ 2y' \\ z' \end{pmatrix}$$

となる。

表現行列が上の対角行列 A' になることの証明. 今の場合、もともとの基底は標準基底であるから、基底の変換行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。基底 (16) に関する f の表現行列は、命題 2.2 より $P^{-1}AP$ である。P の逆行列を計算すると

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

そこで $P^{-1}AP$ を計算すると上の A' となることが行列の計算でわかる。(証明終わり)

この例では基底 (16) をとることがポイントだった。この基底をどうやって見つけ出すかが次回の主要なテーマである。

(以上)