線形代数学第二　第 6 回講義ノート

本多 宣博

2009 年 11 月 18 日

1　ベクトルの成分表示

V を n 次元ベクトル空間とし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底とするとき、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は一次結合

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n \tag{1}$$

で <u>一意的に</u> 表すことができた。これは行列の形で書けば

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2,\, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。

定義 1.1 $\boldsymbol{x}$ から (2) で定まる縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

のことを、「$\boldsymbol{x}$ の、基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ に関する成分」という。 □

当たり前であるが、「成分」というとき、基底として何を使っているか常に意識する必要がある。同じベクトルでも、基底を取り替えれば、成分はほとんどの場合変わる。

例 1.2 $V = \mathbb{R}^n$ の基底として標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ をとると、任意の $\boldsymbol{x} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

と書けるから、

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

となるので、$\boldsymbol{x}$ の、$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関する成分は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

である。

例 1.3 $V = \mathbb{R}^2$ の基底として $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ をとると、

$$\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_1$$

となるから、任意の $\boldsymbol{x} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 \\ &= a\boldsymbol{e}_1 + b\{(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_1\} \\ &= (a - b)\boldsymbol{e}_1 + b(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \\ &= (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} a - b \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、$\boldsymbol{x}$ の、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ に関する成分は

$$\begin{pmatrix} a - b \\ b \end{pmatrix}$$

である。

練習問題 1.4 $V = \mathbb{R}^3$ の基底として

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

をとるとき、任意の $\boldsymbol{x} = (a, b, c) \in V$ の、この基底に関する成分表示を求めよ。

解答例.

$$\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) - (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$$

となるから、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3 \\
&= a\boldsymbol{e}_1 + b\{(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_1\} + c\{(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) - (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\} \\
&= (a-b)\boldsymbol{e}_1 + (b-c)(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + c(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \\
&= (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって $(a-b, b-c, c)$ が成分。 □

練習問題 1.5 $\mathbb{R}^3$ の基底を適当に選んで、それに関する $\boldsymbol{x} = (a, b, c)$ の成分を求めてみよ。（まず初めに、選んだ 3 つのベクトルが基底になっていることを確認すること。）解答は省略。

2 基底の変換行列

この節でも V を n 次元ベクトル空間とする。このとき

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$$

および

$$\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \cdots, \boldsymbol{x}'_n$$

を V の基底とする。このとき、各 $\boldsymbol{x}'_i$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の一次結合で一意的に表せる、すなわち各 i に対して

$$\boldsymbol{x}'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} \boldsymbol{x}_j$$

と表せる。（係数は i に依存するので p_{ji} と書いている。）これを並べて書くと

$$(\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{j1}\boldsymbol{x}_j,\ \sum_{j=1}^{n} p_{j2}\boldsymbol{x}_j,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n} p_{jn}\boldsymbol{x}_j \right) \tag{3}$$

$$= (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる。

定義 2.1 (4) に出てきた $n \times n$ 行列のことを、基底の変換行列という。 □

注意 2.2 上の議論で二組の基底 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ と $\boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_n$ の基底をそっくり入れ替えれば、

$$(\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

となる行列 (q_{ij}) が得られる。これも基底の変換行列という。

基底の変換行列は、二つの基底の間の関係を与える。基底の変換行列は常に正方行列（あとで示すように実際には正則行列）であり、そのサイズは考えているベクトル空間の次元に等しいことに注意しよう。

例 2.3 $\mathbb{R}^2$ の基底として

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

および

$$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2,$$

をとると

$$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるから変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

例 2.4 $\mathbb{R}^2$ の基底として

$$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

および

$$\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

をとると

$$(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから変換行列は

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

例 2.5 今度は $\mathbb{R}^3$ を考え、基底として

$$\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,$$

および

$$\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$$

をとると

$$(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}0 & 2/3 & 0\\ 0 & 1/3 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となるから変換行列は

$$\begin{pmatrix}0 & 2/3 & 0\\ 0 & 1/3 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

である。

練習問題 2.6 $\mathbb{R}^3$ の基底として

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$$

および

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

をとるとき、基底の変換行列を求めよ。

解答例. $\boldsymbol{e}_2=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$ なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2&=\boldsymbol{e}_1-\{(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_1\}\\&=2\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2),\\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3&=\{2\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\}-\{(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\}\\&=2\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

となるから

$$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

となる。よって変換行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

である。 □

命題 2.7 基底の変換行列は必ず正則行列である。 □

証明. V を n 次元とし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ および $\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \cdots, \boldsymbol{x}'_n$ を V の基底とする。(4) でみたように

$$(\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

と表される。簡単のため基底の変換行列を

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

と置くと (5) は

$$(\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n) \tag{6}$$

と書ける。次に二つの基底の立場を入れ替えて同じ議論をすれば $n \times n$ 行列 Q で

$$(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n)\, Q \tag{7}$$

を満たすものがあることがわかる。(7) を (6) に代入して

$$(\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n) = (\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n)\, QP \tag{8}$$

である。よって $QP = E$ となる。したがって P は正則行列であり、$P^{-1} = Q$ である。 □

3 基底の変換行列とベクトルの成分

この節では、基底を取り替えたときに、ベクトルの成分がどう変わるかを調べる。

命題 3.1 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ および $\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n$ を n 次元ベクトル空間 V の基底とし、これらの間の変換行列を P とする。すなわち

$$(\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n)\, P \tag{9}$$

とする。ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ の、$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ および $\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}'_n$ に関する成分表示をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

とする。このときこれらの間には, $\boldsymbol{x}$ の取り方によらず、常に

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

という関係式がある。 □

証明. ベクトルの成分の定義（1 節を参照）より

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots, \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}'_1,\ \boldsymbol{x}'_2,\ \cdots, \boldsymbol{x}'_n) \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

が成り立つ。これに関係式 (9) を代入して

$$(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots, \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots, \boldsymbol{x}_n) P \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

となる。よって成分を比較して

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

となり証明完了。 □

例 3.2 例 2.3 でやったように $\mathbb{R}^2$ の二つの基底

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

および

$$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2,$$

の変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられた。よって $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の、$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,$ に関する成分を (a_1, a_2), $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2,$ に関する成分を (a'_1, a'_2) とするとき、(a_1, a_2) と (a'_1, a'_2) の間には

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

という関係がある。

(以上)