線形代数学第二　第５回講義ノート

本多 宣博

2009年11月11日

1　和空間の次元公式

前回学んだように、V の部分ベクトル空間 W_1, W_2 に対してその和空間が

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \,|\, \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\, \boldsymbol{x}_2 \in W_2\}$$

で定義され、部分ベクトル空間になった。和空間の次元はどう与えられるだろうか？

例 1.1 $V = \mathbb{R}^2$ とし、

$$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \rangle,$$

とすると、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ は V の基底であるから $W_1 + W_2 = V$ となる。よって $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ が成り立つ。

例 1.2 $V = \mathbb{R}^3$ とし、

$$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \rangle,$$

とすると、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ は V の基底であるから $W_1 + W_2 = V$ となる。$\dim W_1 = 1,\ \dim W_2 = 2$ であるからこの場合も $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ が成り立つ。

例 1.3 $V = \mathbb{R}^3$ とし、

$$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \rangle,$$

とすると、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ は V の基底であるから $W_1 + W_2 = V$、したがって $\dim(W_1 + W_2) = 3$ となる。一方 $\dim W_1 = 2,\ \dim W_2 = 2$ であるから $\dim W_1 + \dim W_2 = 4$ となるのでこの場合は $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ は成り立たない。

まず直和の場合は次のように (和空間の次元)=(各次元の和) が成り立つ：

命題 1.4 $W_1 + W_2$ が直和ならば

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2. \tag{1}$$

証明. $\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = m$ とし、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l$ を W_1 の基底, $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ を W_2 の基底とする。このとき前回の命題 2.5 より

$$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m \rangle$$

が成り立つ。（ここまでは直和であることを使っていない。）よって (1) を示すためには $l+m$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ が一次独立であることを示せばよい。一次独立でなかったとすると、自明でない一次関係式

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{m} b_j \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$$

（ただし a_i, b_j のうち少なくともどれか一つは 0 でない）がある。移項して

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \boldsymbol{x}_i = -\sum_{j=1}^{m} b_j \boldsymbol{y}_j$$

となる。左辺は W_1 の元、右辺は W_2 の元であるから、直和であることより、前回の命題 2.7 を使って両辺ともに $\boldsymbol{0}$ でなければならない。よって、$a_i = b_j = 0$ $(\forall i, \forall j)$ となる。したがって $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ は一次独立である。 □

一般の場合（すなわち直和とは限らない場合）の次元公式は次で与えられる。

命題 1.5 和空間の次元公式は以下で与えられる：

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \tag{2}$$

証明. [1]上の証明と同様、$\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = m$ とし、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l$ を W_1 の基底, $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ を W_2 の基底とする。このときやはり前回命題 2.5 より

$$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m \rangle$$

が成り立つが、今度は $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ は一次独立になるとは限らない[2]。そこで, $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ を基底とする $(l+m)$ 次元ベクトル空間を W とする。すなわち、W の任意の元は、W_1 の元と W_2 の元の組

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_i \boldsymbol{x}_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \boldsymbol{y}_j \right) \tag{3}$$

[1]以下の証明は少々難しいかもしれない。別の証明は教科書定理 3.4.7（９６ページ）を参照。

[2]たとえば、$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$ ならば明らかに一次独立にはならない。

の形で書けていて、かつ表し方は一意である。（W は W_1+W_2 とは違うベクトル空間である。）このようにして作ったベクトル空間 W から和空間 W_1+W_2 へは自然な線形写像

$$f:\left(\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{y}_j\right)\longmapsto \sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{y}_j$$

がある。この線形写像は明らかに全射である。また

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{y}_j\right)\in \operatorname{Ker} f \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{0}$$

となるので、最後の式を移項すればわかるように、$\sum a_i\boldsymbol{x}_i\in W_1\cap W_2$ となる。逆に $\sum a_i\boldsymbol{x}_i$ を $W_1\cap W_2$ の任意の元とするとき

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i,\ -\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i\right)\in \operatorname{Ker} f$$

となることは f の定め方から自明なので、

$$W\ni\left(\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{y}_j\right)\longmapsto \sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{x}_i\in W_1$$

という線形写像（第一成分をとる写像）は $\operatorname{Ker} f$ から $W_1\cap W_2$ への同型写像を与える。よって

$$\dim(\operatorname{Ker} f)=\dim(W_1\cap W_2)$$

が成り立つ。そこで、第 3 回定理 3.4 を f に対して適用すれば、

$$\begin{aligned}\dim f(W)&=\dim W-\dim(\operatorname{Ker} f)\\&=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)\end{aligned}$$

となる。すでに注意したように $f(W)=W_1+W_2$ であるから、求める式 (2) を得る。 □

例 1.1 と例 1.2 の和空間は、前回の命題 2.7 を使えば容易にわかるように直和である。一方、例 1.3 の和空間の場合は、$W_1\cap W_2=\langle\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\rangle$ となるので直和ではない。（もちろん命題 1.5 が成立している。）

例 1.6 $V=\mathbb{R}^4$ とし、$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ を標準基底とする。部分ベクトル空間 W_1,W_2 を

$$W_1=\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle,\quad W_2=\langle\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\rangle$$

とする。このとき $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ であるから W_1+W_2 は直和である。よって命題 1.4 または命題 1.5 より $\dim(W_1+W_2)=4$ となる。したがって $W_1+W_2=\mathbb{R}^4$ となる。（もちろんこれは初めから明らか。）

例 1.7 $V = \mathbb{R}^4$ とし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を標準基底とする。部分ベクトル空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$$

とする。このとき

$$W_1 \cap W_2 = \langle \boldsymbol{e}_2 \rangle$$

であるから $\dim(W_1 + W_2) = 1$. よって命題 1.5 より

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。($W = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ なので、これもわざわざ命題 1.5 を使うほどのことではない。)

練習問題 1.8 $V = \mathbb{R}^4$ とし、部分ベクトル空間 W_1, W_2 を

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z, w) \mid x - y + w = y + 2z - w = 0\}, \\ W_2 &= \{(x, y, z, w) \mid z + w = x + 3z + w = 0\} \end{aligned}$$

で定めるとき、$W_1 \cap W_2$ と $W_1 + W_2$ の基底を求めよ。また $W_1 + W_2$ を $ax + by + cz + dw = 0$ の形で表せ。

解答例. $W_1 \cap W_2$ については、連立一次方程式

$$x - y + w = y + 2z - w = z + w = x + 3z + w = 0$$

を解いて

$$(x, y, z, w) = (-2z, -3z, z, -z)$$

となるから、$W_1 \cap W_2$ の基底として $(2, 3, -1, 1)$ がとれる。よって $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. そして $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ であることは明らかなので命題 1.5 より $\dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$ となる。$(x, y, z, w) \in W_1$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - w \\ y \\ (w - y)/2 \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるから、W_1 の基底として $(2, 2, -1, 0)$ と $(-2, 0, 1, 2)$ がとれる。$W_1 \subset W_1 + W_2$ であるから、$W_1 + W_2$ の基底をとるためには $W_1 + W_2$ の元で W_1 に

は入っていないものを一つ見つければよい。$(x, y, z, w) \in W_2$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \\ -z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と書けるから、$(0, 1, 0, 0) \in W_2$ であるが、容易にわかるように $(0, 1, 0, 0) \notin W_1$. よって $W_1 + W_2$ の基底としては

$$(2, 2, -1, 0),\ (-2, 0, 1, 2),\ (0, 1, 0, 0) \tag{4}$$

がとれる。

$W_1 + W_2 = \{ax + by + cz + dw = 0\}$ を満たす a, b, c, d を求めるためには、上の基底の各ベクトルがこの方程式の解であることが必要十分。よって a, b, c, d は連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解である。これを解いて

$$(a, b, c, d) = (1, 0, 2, 0)$$

なので、例えば $x + 2z = 0$ が一つの答え。 □

2 和空間と直和 (３つ以上の部分空間の場合)

ここまで二つの部分空間の和空間および直和を扱ったが、これらの概念は３つ以上の部分空間に対しても同様に定義される:

定義 2.1 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ を V の部分ベクトル空間とするとき

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k := \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k \,|\, \boldsymbol{x}_i \in W_i\}$$

を $W_1, W_2, \cdots, W_k$ の**和空間**という。また和としての表し方が一意的なとき、**直和**であるといい、$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ と書く。 □

たとえば、$W_1 + W_2$ が直和でないならば、どんな部分空間 W_3 に対しても、和空間 $W_1 + W_2 + W_3$ は直和ではない。（これは定義から明らか。）

例 2.2 $V = \mathbb{R}^3$ とし、$W_i = \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ とおく。このとき任意の $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

と一意的に書けるので $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ が成り立つ。

命題 2.3 $W_1, \cdots, W_k$ を V の部分ベクトル空間とすると次の (i),(ii),(iii) は同値。
(i) $W_1 + \cdots + W_k$ が直和。
(ii) 「$\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}_1 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$」が成立。
(iii) 各 W_i から $\boldsymbol{0}$ でない任意の元 $\boldsymbol{x}_i$ をとると、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は必ず一次独立。
□

証明. (i)⇒ (ii) ：$W_1 + \cdots + W_k$ が直和であるとし、

$$\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$$

とおく。これの右辺は $\boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0}$（$k$ 個の零ベクトルの和）と書けて、$\boldsymbol{0} \in W_i$ であるから、和としての表し方の一意性から任意の i に対して $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ となる。よって (ii) が成り立つ。

(ii)⇒ (i) ：(ii) が成り立つとし、直和であることを示すために $\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_k$ $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in W_i)$ とおく。移項すると

$$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) + \cdots + (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i \in W_i$ $(\forall i)$ であるから仮定より $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{0}$, すなわち $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ が成り立つ。よって直和である。

(ii)⇒ (iii) ：(ii) が成り立つとし、$\boldsymbol{x}_i \in W_i$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ をとる。これらが一次独立であることを示すために

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

とする。任意の i に対して W_i は部分ベクトル空間なので $a_i\boldsymbol{x}_i \in W_i$ となるから、仮定 (ii) により $a_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ $(\forall i)$ となる。ここで $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ としていたので $a_i = \boldsymbol{0}$ でなければならない。よって $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は一次独立であり、(iii) が成り立つ。

(iii)⇒ (ii) ：(iii) を仮定し、

$$\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \ (\boldsymbol{x}_i \in W_i) \tag{5}$$

とする。もしある i に対して $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ であったとすると、(5) は自明でない一次関係式になるから、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が一次独立であることに反する。よって任意の i に対して $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ であり、(ii) が成り立つ。 □

注意 2.4 $k=2$ のときは、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ ならば $W_1 + W_2$ は直和だった。（前回命題 2.7)。これに対し、3 個以上の和空間の場合は、$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k = \{\mathbf{0}\}$ だからといって $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ が直和であるとは限らない。実際、$V = \mathbb{R}^3$ とし、$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $W_2 = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$, $W_3 = \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 \rangle$ とすると $W_1 \cap W_2 = \langle \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $W_1 \cap W_3 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ であるから $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$ であるが、$W_1 + W_2$ が直和でない（前回練習問題 2.4 参照）ので $W_1 + W_2 + W_3$ も直和でない。これは間違えやすいので注意すること。

(以上)