線形代数学第二　第４回講義ノート

本多 宣博

2009年10月28日

1　階数に関する基本事項の続き

命題 1.1 ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ に対し、これらの中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数を $r\,(\leq k)$ とすると $\dim\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\rangle = r$ が成立する。(以前やったように $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\rangle$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が張るベクトル空間である。) □

証明. [1]最大個数を実現する一次独立なベクトルを $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k)$ とする。明らかに

$$\dim\langle \boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}\rangle = r$$

であるから、命題を証明するためには

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\rangle = \langle \boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}\rangle \tag{1}$$

であることを示せばよい。そのためには二つの包含関係「$\subset$」と「$\supset$」を示せばよい。集合 $\{\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}\}$ は $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ の部分集合であるから $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\rangle \supset \langle \boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}\rangle$ が成立することは明らか。もう一方の包含関係を示すために、まず任意の i に対して $\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ の一次結合で表せることを示す。そこで、一次結合で表せない $\boldsymbol{x}_i$ があったとし、

$$\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{x}_{i_j} + a_{r+1}\boldsymbol{x}_i = 0$$

とおくと、もし $a_{r+1} \neq 0$ ならば $\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ の一次結合で表せないことに反するので、$a_{r+1} = 0$ でなければならない。すると $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ が一次独立であることから $a_1 = \cdots = a_r = 0$ となる。よって $(r+1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}, \boldsymbol{x}_i$ は一次独立になるので、r が最大個数であることに反する。

[1]以下の証明はかなり丁寧に書いてあるので、長いからといってあきらめてはいけない。

（一次独立になることのこの証明は第 2 回命題 1.12 の証明と同じである。）したがって任意の i に対して $\boldsymbol{x}_i$ は $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ の一次結合で表せる。

$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ の任意の元を $\boldsymbol{x}$ とすると、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i \tag{2}$$

と書けるが、上で証明したように $\boldsymbol{x}_i$ たちはどれも $\boldsymbol{x}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ の一次結合で書けているから、それらを (2) に代入すれば、$\boldsymbol{x}$ も $\boldsymbol{x}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r}$ の一次結合で書けることがわかる。よって $\boldsymbol{x}$ は $\langle \boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r} \rangle$ の元である。したがって証明したかった包含関係 $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k \rangle \subset \langle \boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_r} \rangle$ を得る。 □

例 1.2 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ を一次独立な元とする。このとき $n+2$ 個のベクトル

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_1 + n\boldsymbol{x}_n \tag{3}$$

の中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数は 2 である。証明：3 つめ以降はすべて $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の一次結合で書けているから、

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_1 + n\boldsymbol{x}_n \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$$

である。$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は一次独立としているので $\dim\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 2$ である。よって命題 1.1 より (3) の中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数は 2 である。（証明終）

次に、命題 1.1 を使って行列の階数に関する重要な性質（階数の一つの意味づけ）を示す：

命題 1.3 $m \times n$ 行列 A に対して、$\mathrm{rank} A$ は A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数に等しい。また、行ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数とも等しい。□

例 1.4 例 1.2 の設定のもと、$n \times (n+2)$ 行列

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_1 + n\boldsymbol{x}_n)$$

の階数は 2 である (by 命題 1.3)。

命題 1.3 の証明のために次の補題を示す。これはそれ自身重要。

補題 1.5 $m \times n$ 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が定める線形写像を $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ とすると、次式が成立する：

$$f(\mathbb{R}^n) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle.$$

すなわち、A が定める線形写像の像は A の列ベクトルが張る部分ベクトル空間と等しい。 □

証明. これは行列のかけ算の定義を使って次のように簡単に示すことができる。すなわち、像の定義から $f(\mathbb{R}^n)$ の元はある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を使って $A\boldsymbol{x}$ と書けている。$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすると行列の積の定義から

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \tag{5}$$

となる。よって $A\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ となるので

$$f(\mathbb{R}^n) \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle. \tag{6}$$

逆に、任意に $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots x_n\boldsymbol{a}_n \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ を任意にとったとき、(4), (5) を逆にたどれば $A\boldsymbol{x}$ と書けるので、逆向きの包含関係

$$f(\mathbb{R}^n) \supset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle \tag{7}$$

も成り立つ。(6), (7) より、求める等号 $f(\mathbb{R}^n) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ を得る。 □

命題 1.3 の証明. 前回の定理 3.4 より、$\mathrm{rank}A = \dim f(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。そして補題 1.5 より $f(\mathbb{R}^n) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ となる。さらに命題 1.1 より

$$\dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数に等しいので、$\mathrm{rank}A$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数に等しい。よって前半が示せた。

$\mathrm{rank}A$ が A の行ベクトルから選びうる一次独立なベクトルの最大個数とも等しいことを示すためには、A の転置行列 ${}^tA$（これはもちろん $n \times m$ 行列）に対して前半で示した性質を適用すればよい。実際、${}^tA$ の列ベクトルは A の行ベクトルに他ならないので、$\mathrm{rank}\,{}^tA$ は A の行ベクトルの中から選びうる一次独立なベクトルの最大個数に等しい。そして、$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\,{}^tA$ であることを思い出せばよい。 □

2　ベクトルの和空間と直和

第 2 回でやったように、ベクトル空間 V の二つの部分ベクトル空間 W_1, W_2 が与えられたとき、共通部分 $W_1 \cap W_2$ はいつでも部分ベクトル空間になった (第 2 回練習問題 1.10)。このほかに、和空間とよばれるものがいつでも定義される：

定義 2.1 W_1, W_2 を V の部分ベクトル空間とするとき、V の部分集合

$$W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \,|\, \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\, \boldsymbol{x}_2 \in W_2\}$$

のことを、$W_1 + W_2$ の**和空間**という。 □

命題 2.2 W_1 と W_2 が部分ベクトル空間ならば和空間 $W_1 + W_2$ もいつでも部分ベクトル空間である。 □

証明. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in W_1 + W_2$ と $a \in \mathbb{R}$ を任意にとったとき、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in W_1 + W_2$ であることと $a\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ であることを示せばよい[2]。$\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ より、和空間の定義より、ある $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$ と $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ が存在して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ と書ける。同様に $\boldsymbol{x}' \in W_1 + W_2$ より、ある $\boldsymbol{x}'_1 \in W_1$ と $\boldsymbol{x}'_2 \in W_2$ が存在して $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2$ と書ける。すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' &= (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + (\boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2) && (8) \\ &= (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}'_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}'_2) && (9) \end{aligned}$$

となる。ここで、W_1, W_2 が部分ベクトル空間であることから $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}'_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}'_2 \in W_2$ となるよって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ は W_1 の元と W_2 の元の和で書けているので、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in W_1 + W_2$ が成り立つ。

また、スカラー倍についても同様に

$$a\boldsymbol{x} = a(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = a\boldsymbol{x}_1 + a\boldsymbol{x}_2 \tag{10}$$

となり、W_1, W_2 が部分ベクトル空間であることから $a\boldsymbol{x}_1 \in W_1, a\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ となる。よって $a\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ となる。

以上より $W_1 + W_2$ が部分ベクトル空間であることが証明された。 □

和空間のもっとも簡単な例を与えよう。

例 2.3 $V = \mathbb{R}^3$ とし、$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 1)$ とおく。部分ベクトル空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \langle \boldsymbol{x}_1 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{x}_2 \rangle$$

[2] この時点でわからなくなった人は、部分ベクトル空間の定義 (第 2 回定義 1.1) に戻ること。

で定める。このとき

$$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \quad (\boldsymbol{x}_1 \text{ と } \boldsymbol{x}_2 \text{ が張る平面}).$$

次の例は上の例と少し様子が違う：

練習問題 2.4 再び $V = \mathbb{R}^3$ とし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を標準基底とする。部分ベクトル空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$$

で定める。このとき $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ であることを示せ。

解答例. 任意の元 $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ が W_1 の元と W_2 の元の和で表せることを示せばよい。$\boldsymbol{x}_1 = (x, y, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 0, z)$ とおけば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ が成り立つ。また $\boldsymbol{x}_1 = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{x}_2 = z\boldsymbol{e}_3$ と書けるので $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ である。よって $\boldsymbol{x}$ は W_1 の元と W_2 の元の和で表されるので $\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ である。 □

W_1 の生成元と W_2 の生成元をまとめたものは $W_1 + W_2$ の生成元になる。すなわち

命題 2.5

$$W_1 = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n \rangle,$$

ならば

$$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n \rangle$$

が成り立つ。 □

証明.

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in W_1,\ \boldsymbol{y} \in W_2\} \\ &= \{(a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots a_m\boldsymbol{x}_m) + (b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{y}_n) \mid a_i, b_j \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n \rangle \end{aligned}$$

(証明終)

和空間の特別な場合として、直和と呼ばれる概念がある：

定義 2.6 W_1, W_2 を部分ベクトル空間とするとき、和空間 $W_1 + W_2$ が**直和**であるとは、任意の元 $\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ に対して、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ $(\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_2)$ と表す表し方が ただ一通り である場合をいう。和空間 $W_1 + W_2$ が直和のとき、直和になっていることを明示するために $W_1 + W_2$ の代わりに $W_1 \oplus W_2$ と表すことが多い。 □

たとえば練習問題 2.4 の和空間の場合、任意の $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (x, y, 0) + (0, 0, z)$$

と書けるし、

$$\boldsymbol{x} = (x, 0, 0) + (0, y, z)$$

とも書けるので、和としての表し方が一意的ではない。よって和空間 $W_1 + W_2$ は直和ではない。

一方、例 2.3 の和空間の場合、

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2$$

と二通りに表せたとすると、移項して

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

となる。ここで $c_1 = a_1 - b_1, c_2 = a_2 - b_2$ とおくと

$$\begin{aligned}(a_1 - b_1)\boldsymbol{x}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{x}_2 &= c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 \\ &= (c_1, c_1, 0) + (0, c_2, c_2) \\ &= (c_1, c_1 + c_2, c_2)\end{aligned}$$

となる。これが $\boldsymbol{0}$ に等しいので $c_1 = c_2 = 0$、すなわち $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ となる。よって和としての表し方は一意的なので、$W_1 + W_2$ は直和である。

上では定義に戻って直和になっていることを示したが、実際には次の性質を使って判定することが多い。

命題 2.7 和空間 $W_1 + W_2$ が直和であるための必要十分条件は $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ である。 □

証明. まず $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ ならば直和であることを示す。

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2', \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1' \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2' \in W_2$$

とする。（すなわち $W_1 + W_2$ の元が和として二通りに表せたとする。）移項して

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2'$$

である。この式の左辺は W_1 の元であり、右辺は W_2 の元である。よって $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'$ は $W_1 \cap W_2$ の元である。仮定により $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ であるから $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{o}$,

すなわち $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1'$ となる。よって $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2'$ となる。したがって和としての表し方は一意的であるから、直和である。

逆に直和ならば $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ であることを示す。もし $W_1 \cap W_2$ の元 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ があったとすると、まず

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{x} \in W_1,\, \boldsymbol{o} \in W_2$$

となり、一方で

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{o} \in W_1,\, \boldsymbol{x} \in W_2$$

とも書ける。これらは $\boldsymbol{x}$ の表し方が一意的ではないことを意味する。したがって $W_1 + W_2$ は直和でない。よって直和ならば $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ が成り立つ。□

練習問題 2.8 （やや難）$\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 W_1, W_2 が 2 次元のとき、$W_1 + W_2$ は決して直和にならないことを示せ。

解答例. 命題 2.7 より $W_1 \cap W_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ であることを示せばよい。W_1 の基底を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$, W_2 の基底を $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ とし、

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$$

とおく。これは移項すれば

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = -b_1\boldsymbol{y}_1 - b_2\boldsymbol{y}_2$$

となる。これは $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \in W_1 \cap W_2$ を意味する。よって $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ であるとすると、$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ となる。よって $a_1 = a_2 = 0$。また $-b_1\boldsymbol{y}_1 - b_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$ より $b_1 = b_2 = 0$ となる。これは 4 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ が一次独立であることを意味するので $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ と矛盾する。したがって $W_1 \cap W_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ である。 □

(以上)