線形代数学第二　第３回講義ノート

本多 宣博

2009 年 10 月 21 日

1　基底と次元に関する補足

ベクトル空間の次元がわかっているときには、基底を与えるために次の命題がよく使われる。

命題 1.1 V を n 次元ベクトル空間とする。このときもし $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ が一次独立ならば $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は V の基底である。 □

証明. 仮定の下、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が V を張ることを示せばよい。もし $\boldsymbol{x} \in V$ で $\boldsymbol{x} \notin \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ となるものがあったとすると、第一回の命題 4.2 の証明と同様にして $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ は一次独立になる。よって部分ベクトル空間 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x} \rangle$ は $(n+1)$ 次元になる。これは前回の系 1.13（部分ベクトル空間の次元が全体空間の次元を越えないこと）に反する。よって $\boldsymbol{x} \notin \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ となる $\boldsymbol{x}$ は存在しない。これは $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle = V$ を意味する。 □

注意 1.2 $\dim V = n$ であっても、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立でなければ、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は V の基底とはならない。

2　線形写像の kernel と像の計算例

前回定義したように、$f : V \to V'$ を任意の線形写像とするとき

$$\mathrm{Ker}\, f := \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}'\}$$
$$f(V) := \{f(\boldsymbol{x}) \in V' \mid \boldsymbol{x} \in V\}$$

のことをそれぞれ f の kernel（核）, image（像）といい、それぞれ V, V' の部分ベクトル空間だった。ここでは kernel と image の計算の具体例を与える。

例題 2.1 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で与えるとき、$\operatorname{Ker} f$ と $f(\mathbb{R}^3)$ の基底を求めよ。

解答例. f の定義より $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ であるためには

$$x - y = y - z = z - x = 0$$

であることが必要十分である。これは $x = y = z$ と同値であるから、$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x = y = z$ である。よって $\operatorname{Ker} f$ の任意の元は $(1, 1, 1)$ の定数倍でかけるから、$\operatorname{Ker} f$ の基底として $(1, 1, 1)$ がとれる。とくに $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ である。

また、像については、前回の命題 1.14 より

$$\begin{aligned} \dim f(\mathbb{R}^3) &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{Ker} f) && (1) \\ &= 3 - 1 = 2 && (2) \end{aligned}$$

となるので、命題 1.1 より $f(\mathbb{R}^3)$ の基底を与えるためには一次独立な二つの元を与えればよい。

たとえば

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, -1), \quad f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0)$$

は互いに平行でないから一次独立なので $f(\mathbb{R}^3)$ の基底を与える。（もちろん基底の取り方は無数にある。） □

注意 2.2 上の解答例の後半（像の基底を求める部分）で次のような <u>間違い</u> をしてはいけない：

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

とかけるので $(1, 0, -1)$, $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ は $f(\mathbb{R}^3)$ の基底である。（間違い解答終わり）

もちろん式 (3) 自体は正しいが、これが意味するのは

「$(1, 0, -1)$, $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ が $f(\mathbb{R}^3)$ を張っていること」

であり、これら３つのベクトルが一次独立であることは意味しない。実際、これら３つのベクトルの間には、自明でない一次関係式

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

が成り立つ。したがって一次独立ではない。

練習問題 2.3 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を

$$f:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&2&0\\1&4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

で与えるとき、$\operatorname{Ker} f$ と $f(\mathbb{R}^3)$ の基底を求めよ。

解答例. 数値が違う以外、例題 2.1 とまったく同じである。$(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f$ は $x=2y,\ 3y=2z$ と同値なので、$\operatorname{Ker} f$ の任意の元は $(4a,2a,3a)$ の形で書ける。よって $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$ であり、$\operatorname{Ker} f$ の基底としては $(4,2,3)$ がとれる。

像についても例題 2.1 と同様にして、前回の命題 1.14 より

$$\dim f(\mathbb{R}^3)=\dim\mathbb{R}^3-\dim(\operatorname{Ker} f)=3-1=2 \tag{4}$$

となるので、$f(\mathbb{R}^3)$ の基底を与えるためには一次独立な二つの元を与えればよい。$f(1,0,0)=(1,-1,1),\ f(0,1,0)=(1,2,4)$ は一次独立であるから、これらが $f(\mathbb{R}^3)$ の基底である。 □

練習問題 2.4 いろいろな行列（正方行列とは限らない）を適当に与えて、それが定める線形写像の kernel と像の次元を求めてみよ。

解答は省略。

3　行列の階数と像の次元の関係

前期の講義で学んだように、行列の**階数** (rank) は、行列に左基本変形と右基本変形を繰り返し施して標準形に直したときに、1 がいくつ並ぶかによって定義された。（忘れた人は教科書４３〜５０ページを参照せよ。）たとえば標準形が

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

のとき、行列の階数はそれぞれ 2,3,2 である。

例 3.1 たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので階数は 2 である。*(r_i は i 行目を表す。)*

練習問題 3.2 いくつか適当に行列を作って階数を計算してみよ。

解答は省略。

練習問題 3.3 階数が 2 である 3×4 行列で、標準形とは異なるものを 3 つ作れ。

解答例. 階数が 2 である 3×4 行列の標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。基本変形は可逆操作なので (すなわち元に戻す変形も基本変形になっているので)、これに基本変形を施しても階数は不変である。よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などはすべて階数 2 である。(もちろん解答は無数にある。) □

階数の定義から、任意の $m\times n$ 行列の階数は、$\min\{m,n\}$ 以下であることを思い出しておく。(たとえば 3×5 行列がとりうる階数は 0,1,2,3 であって、階数 4 以上のものは存在しない。)

以上で階数の復習は終えて、新しい内容に入る。次が今回の講義で最も重要な定理である。

定理 3.4 A を $m\times n$ 行列、$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を A が定める線形写像とすると、次式が成立する：

$$\mathrm{rank}A = \dim f(\mathbb{R}^n) \tag{5}$$

証明のために、前期に学んだ次の命題（教科書 59 ページ、定理 2.3.4）を思い出そう。

命題 3.5 A を $m \times n$ 行列, $\mathrm{rank}A = r$ とするとき、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は、$(n-r)$ 個の解 $\boldsymbol{x}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の一次結合で一意的に表すことができる。□

なお、$\boldsymbol{x}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は（基本変形の取り方によるので）一意的には決まらない。また教科書定理 2.3.4 には「$\boldsymbol{x}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を決めたときに、解をこれらの一次結合で表す表し方が一意的である」とは明示されてはいないが、この命題の証明は基本変形によっており、基本変形は同値変形なので一意的であることがわかる。

前期に命題 3.5 を学んだ段階ではベクトル空間の概念はまだ学んでいなかったが、第一回 例 2.2 でやったように、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体はベクトル空間をなす。すると命題 3.5 は次のように言い換えることができる。

命題 3.6 A を $m \times n$ 行列, $\mathrm{rank}A = r$ とするとき、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解のなすベクトル空間は $(n-r)$ 次元である。 □

以上の準備の下に定理 3.4 を証明してみよう。

定理 3.4 の証明. $\mathrm{rank}A = r$ とすると命題 3.5 より連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = 0$ の解全体のなす空間は $n-r$ 次元のベクトル空間である。そしてこのベクトル空間は（定義より）$\mathrm{Ker}\, f$ そのものである。よって前回の命題 1.14 より

$$\begin{aligned} \dim f(\mathbb{R}^n) &= \dim \mathbb{R}^n - \dim(\mathrm{Ker}\, f) \\ &= n - (n-r) \\ &= r \end{aligned}$$

となる。よって (5) を得る。 □

教科書によっては公式 (5) を行列の階数の定義とする場合がある。基本変形を使って階数を定義すると、定義の意味するところがわかりにくい上に、基本変形の取り方によらないことを証明する必要があるのに対し、(5) を使えばこうした欠点がなくなるので実際にはこちらのほうがある意味でずっとよい定義である。（もっとも、次に述べるように、階数の計算には基本変形を使うのが最も簡単なので、基本変形による定義は実用的な定義であると言える。）いずれにしても、<u>行列の階数は、行列が定める線形写像の像の次元に等しい</u>。

最後に、定理 3.4 の応用をひとつ説明しておこう。例題 2.1 と練習問題 2.3 では、行列が定める線形写像に対して、

- まず連立一次方程式を解くことにより、Ker の次元を求める、
- 次に前回の命題 1.14 を使って像の次元を求める

という順序で像の次元を求めたが、定理 3.4 を使うと、Ker の次元を計算することなく、像の次元を求められる。すなわち、基本変形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により行列の階数が 2 であることがわかるので、定理 3.4 により $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$ である。

練習問題 3.7 同様にして、練習問題 2.3 の線形写像についても $\dim f(\mathbb{R}^3)$ を定理 3.4 を使って求めてみよ。

(以上)