# 線形代数学第二　第２回講義ノート

本多 宣博

2009年10月14日

本日講義を受講した方への連絡事項：

本日実施した小テストは、前回予告したように２点満点としますが、今日は鉄道の大幅な遅延があったようなので、今回の２点は最終成績に**上乗せ**する形にします。（したがって今回受験できなかった人もこれから満点が続けば最終成績は１００点になります。）

## 1　部分ベクトル空間

$V$ をベクトル空間とする。

**定義 1.1** $V$ の部分集合 $W$ は次の二つの条件を満たすとき $V$ の**部分ベクトル空間**（または単に**部分空間**[1]）と言われる：(i) $W$ は和に関して閉じている；すなわち任意の $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ に対して $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in W$, (ii) $W$ はスカラー倍に関して閉じている；すなわち任意の $\boldsymbol{w} \in W$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $a\boldsymbol{w} \in W$. □

定義からすぐにわかるように、$W$ が $V$ の部分ベクトル空間のとき、$W$ 自身ベクトル空間になる。

**例 1.2** $V = \mathbb{R}^2$ とし、

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 7y = 0\}$$

とすると、$W$ は $V$ の部分ベクトル空間である。実際、任意に $(x, y) \in W$, $(x', y') \in W$ をとると、$2x - 7y = 2x' - 7y' = 0$ であるから

$$2(x + x') - 7(y + y') = (2x - 7y) + (2x' - 7y') = 0 + 0 = 0$$

となるので $(x + x', y + y') \in W$ である。また任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$2(ax) - 7(ay) = a(2x - 7y) = a \cdot 0 = 0$$

[1]板書ではこちらを使う

となるので $a(x,y) \in W$ である。以上により $W$ は条件 *(i), (ii)* を満たすので部分ベクトル空間である。

**例 1.3** $V = \mathbb{R}^2$ とし

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x+1\}$$

とすると、$W$ は $V$ の部分ベクトル空間でない。実際、$(0,1) \in W$ であるが、$2 \cdot (0,1) = (0,2) \notin W$ なので $W$ は条件 (ii) を満たさない。条件 (i) も満たさないことは各自確かめておくこと。

**例 1.4** $V = \mathbb{R}^2$ とし、

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\} \quad (\text{放物線})$$

とすると、$W$ は $V$ の部分ベクトル空間でない。実際、$(1,1) \in W$ であるが、$2 \cdot (1,1) = (2,2) \notin W$ なので $W$ は条件 (ii) を満たさない。条件 (i) も満たさないことは各自確かめておくこと。

**例 1.5** 前回　例2.2で定義したベクトル空間 $V$ (斉次連立一次方程式の解全体) は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である。

**例 1.6** $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ が張る部分空間

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$$

は $V$ の部分ベクトル空間である。特に $n = 1$ で $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$ であれば、$\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$ は $\boldsymbol{x}_1$ が張る直線である。また $n = 2$ で $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ が一次独立であれば $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が張る平面である。

**練習問題 1.7** 一般に、$V = \mathbb{R}^n$ とし、$c_1, c_2, \cdots, c_n$ をすべてが 0 ではない定数とするとき、

$$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

とすると、$W$ は $V$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

解答例　$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in W$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in W$ を任意にとると

$$\begin{aligned} c_1(x_1+y_1) + \cdots + c_n(x_n+y_n) &= (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) + (c_1y_1 + \cdots + c_ny_n) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$. また $a \in \mathbb{R}$ を任意にとるとき

$$\begin{aligned} c_1(ax_1)+\cdots+c_n(ax_n) &= a(c_1x_1+\cdots+c_nx_n) \\ &= a\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $a\boldsymbol{x} \in W$ である。以上より $W$ は部分ベクトル空間である。 □

次に、線形写像が与えられたときにいつでも生じる二つの部分ベクトル空間を与える。

**定義 1.8** $f: V \to V'$ を任意の線形写像とするとき

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}'\} \\ f(V) &:= \{f(\boldsymbol{x}) \in V' \mid \boldsymbol{x} \in V\} \end{aligned}$$

のことをそれぞれ $f$ の kernel（核）, image（像）という。($\boldsymbol{o}'$ は $V'$ の零ベクトル。)

**命題 1.9** $f: V \to V'$ を任意の線形写像とするとき (i) $\operatorname{Ker} f$ は $V$ の部分ベクトル空間である。(ii) $f(V)$ は $V'$ の部分ベクトル空間である。 □

**証明**. (i) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} f$ とすると $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}'$ であるから、$f$ の線形性より

$$f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{o}'+\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}'$$

となるので $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} f$。また任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(a\boldsymbol{x}_1) = af(\boldsymbol{x}_1) = a\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}'$$

となるので $a\boldsymbol{x}_1 \in \operatorname{Ker} f$. よって $\operatorname{Ker} f$ は $V$ の部分ベクトル空間である。

(ii) $\boldsymbol{x}_1' = f(\boldsymbol{x}_1) \in f(V)$, $\boldsymbol{x}_2' = f(\boldsymbol{x}_2) \in f(V)$ に対して

$$\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2' = f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$$

となるので $\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2' \in f(V)$. また任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$a\boldsymbol{x}_1' = af(\boldsymbol{x}_1) = f(a\boldsymbol{x}_1)$$

となるので $a\boldsymbol{x}_1' \in f(V)$. よって $f(V)$ は $V'$ の部分ベクトル空間である。 □

**練習問題 1.10** $V_1, V_2$ を $V$ の部分ベクトル空間とするとき共通部分 $V_1 \cap V_2$ も $V$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

解答例. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V_1 \cap V_2$ のとき、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in V_1 \cap V_2$、$a\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$ であることを示せばよい。$V_1, V_2$ は部分ベクトル空間であるから

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in V_1,\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in V_2,$$

が成り立つ。よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in V_1 \cap V_2$ となる。また同じ理由で

$$a\boldsymbol{x} \in V_1,\ a\boldsymbol{x} \in V_2$$

となるので $a\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$ である。よって $V_1 \cap V_2$ は $V$ の部分ベクトル空間である。 □

**練習問題 1.11** $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_1, V_2$ を

$$V_1 = \{(x, y, z) \,|\, 2x - 2y - z = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \,|\, x - 3y - z = 0\}$$

で定めるとき、共通部分 $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ。

解答例. 二つの一次式から $z$ を消去すれば $y = -x$ を得る。これをもとの一次式に代入して、

$$z = 4x$$

を得る。よって $V_1 \cap V_2$ の元は

$$(x, -x, 4x)$$

の形でかける。よって $V$ の基底としては $(1, -1, 4)$ がとれる。 □

次に、部分ベクトル空間と全体空間の基底の関係をひとつ与える。次の命題は、部分空間の基底を延長して全体の基底を作れること（すなわち、部分空間の基底を部分集合としてもつような全体空間の基底をとれること）を示している。

**命題 1.12** $V$ を $n$ 次元ベクトル空間とし、$W$ を $V$ の部分ベクトル空間とする。このとき $W$ の任意の基底 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ に対して、$\boldsymbol{x}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ で

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$$

が $V$ の基底であるようなものがとれる。 □

**証明**. $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ は $W$ の基底なので $W = \langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m \rangle$ である。$W = V$ ならば証明することはなにもないので、$W \neq V$ とする。$\boldsymbol{x}_{m+1}$ を $V$ の元で $W$ には

属さないものとする。このとき $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+1}$ が一次独立であることを示す。そのためには一次関係式

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m + a_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1} = \boldsymbol{o} \tag{1}$$

があったときに $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m+1} = 0$ であることを示せばよい。もし $a_{m+1} \neq 0$ であったとすると上の関係式より

$$\boldsymbol{x}_{m+1} = -\frac{1}{a_{m+1}}(a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m)$$

となる。これは $\boldsymbol{x}_{m+1}$ が $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ の一次結合で書けていることを表しているので $\boldsymbol{x}_{m+1} \in W$ となり、$\boldsymbol{x}_{m+1}$ の取り方に反する。よって $a_{m+1} = 0$ でなければならない。すると (1) は

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o} \tag{2}$$

となる。$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ は $W$ の基底だったので一次独立であるから、これは $a_1 = \cdots = a_m = 0$ を意味する。よって (1) の係数はすべて 0 である。

以上により $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+1}$ は一次独立なので部分ベクトル空間 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+1} \rangle$ の基底である。このとき $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+1} \rangle = V$ となっていれば証明完了。$\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+1} \rangle \neq V$ ならば $V$ の元で $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+1} \rangle$ に属さない $x_{m+2}$ をとって上と同じ議論をすれば $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+2}$ は一次独立になる。$\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+2} \rangle = V$ なら証明完了。$\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+2} \rangle \neq V$ なら $V$ と一致するまで同じ議論を繰り返せばよい。 □

命題 1.12 から次の基本的事実がわかる。

**系 1.13** $W$ が $V$ の部分ベクトル空間のとき、$\dim W \leq \dim V$ である。 □

**証明**. 命題 1.12 の記号を使うと

$$\dim V = n, \quad \dim W = m$$

であり、命題の主張から $m \leq n$ であるから。 □

最後に命題 1.12 を使って次を示す。

**命題 1.14** $f : V \to W$ を線形写像とすると、$V$, $\operatorname{Ker} f$, $f(V)$ の次元の間に次の関係式が成り立つ：

$$\dim f(V) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} f).$$

**証明**. $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = k$ とおき $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ を $\mathrm{Ker}\, f$ の基底とする。$\dim V = n$ とすると命題 1.12 より $\boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ で $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が $V$ の基底になるようなものがとれる。このとき、$n-k$ 個の元

$$f(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$$

が $f(V)$ の基底であることを示せばよい。まず一次独立であることを示す。

$$a_{k+1} f(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}$$

とすると $f$ の線形性から $f(a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + a_n \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}$ となる。よって

$$a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + a_n \boldsymbol{x}_n \in \mathrm{Ker}\, f$$

である。よって ($\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底であることから)

$$a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + a_n \boldsymbol{x}_n = a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{x}_k$$

とかける。移項して

$$a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{x}_k - a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} - \cdots - a_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}.$$

ここで $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であるから、$a_1 = \cdots = a_n = 0$ となる。よって特に $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ となるので $f(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ は一次独立である。最後に $f(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ が $f(V)$ を張ること、すなわち任意の $f(\boldsymbol{x}) \in f(V)$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が $f(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ の一次結合で表せることを示す。$\boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n \boldsymbol{x}_n$ と書けるから $f(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = f(\boldsymbol{x}_k) = 0$ に注意して

$$f(\boldsymbol{x}) = a_{k+1} f(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{x}_n)$$

となる。よって確かに一次結合で表せる

以上により、$f(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ は $f(V)$ の基底である。 □

**練習問題 1.15** $3 \times 3$ 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、$A$ を左からかける線形写像とするとき、$\dim f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ。

解答例. 連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて $x = 0, y = z$ を得る。よって

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

となるので $\operatorname{Ker} f$ の基底として $(0, 1, 1)$ がとれる。よって $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ である。したがって命題 1.14 より

$$\begin{aligned} \dim f(\mathbb{R}^3) &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。 □

（以上）