線形代数学第二　第１回講義ノート

本多 宣博

2009 年 10 月 7 日

1　講義の進め方と講義概要

- 毎回講義の開始時に、前回の内容の理解度を確認する小テストを行います。（ただし初回（今日）は行いません。）
- 小テストは１回２点満点。
- 最終成績は、基本的には

  (小テストの合計点)+(期末試験の点)

  として出します。（場合によっては中間試験を行います。）
- 実際の講義はおおむねこの講義ノートに沿って行う予定ですが、講義ノートそのままとは限りません。（特に講義ノートでは図を書いて説明することはできません。）
- 再試験による得点調整や、レポートによる救済措置はとりません。
- 講義内容に関する質問は、基本的に随時受け付けますので、都合の良いときに研究室（本館 3 階 18）に来て下さい。

非常におおざっぱに言って、この半年間の講義の目標は次の二つです。

- （抽象的な）ベクトル空間に関する諸概念を理解すること、また具体的な例においてそれらを実際に計算できるようになること。
- 行列の固有値と対角化を計算できるようになること。またその応用として２次形式の標準形を計算できるようになること。

2　ベクトル空間と線形写像（前期の復習）

ベクトル空間とは、和と定数倍（スカラー倍ともいう）が定義されている空間のことをいうのであった。（正確な定義は教科書 68 ページを参照。）

ベクトル空間の重要な例をいくつか思い出しておこう。

例 2.1 $V = \mathbb{R}^2$ は普通に和とスカラー倍が定義されているのでベクトル空間である。例えば、

$$(2,1)+(3,-5)=(5,-4),\ 3(-2,3)=(-6,9)$$

同様に、$V = \mathbb{R}^n$ もベクトル空間である。例えば

$$(2,1,0)-(4,2,9)=(-2,-1,-9),\ (-2)(7,2,11)=(-14,-4,-22)$$

同様に、任意の自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間である。

例 2.2 A を 2×2 行列とし、A が定める斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2)$ の解全体のなす集合を V とする。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ とすると、$A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}$ より

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$$

となるので和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ も解である。すなわち $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$. 同様に任意の定数 $a\in\mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $a\boldsymbol{x}\in V$ となるので V はベクトル空間である。

同様に $m\times n$ 行列 A が定める斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ （$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$）の解の全体もベクトル空間である。

練習問題 2.3 斉次とは限らない連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ （A は $m\times n$ 行列、$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$）の解の全体の場合は、$\boldsymbol{b}\neq 0$ のとき（すなわち斉次でないとき）ベクトル空間にはならない。理由を答えよ。

解答例（その１） ベクトル空間は常に零ベクトルを含んでいた。方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を解にもつための条件は明らかに $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ である。 □

解答例（その２） $\boldsymbol{x}\in V$ とすると、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ なので、$A(2\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{b}$ となる。よって $2\boldsymbol{x}$ が解であるためには $2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, すなわち $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ でなければならない。 □

V, W をベクトル空間とするとき V から W への**線形写像**とは、次を満たす写像 $f: V\to W$ であった。

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}),\quad \forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\in V,$$
$$f(a\boldsymbol{x})=af(\boldsymbol{x}),\quad \forall\boldsymbol{x}\in V,\forall a\in\mathbb{R}.$$

例 2.4 $V = W = \mathbb{R}^2$ とし、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき $f : V \to W$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると f は線形写像である。同様に、A を任意の $m \times n$ 行列とするとき、写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると f は線形写像である。

練習問題 2.5 二つの実数 a, b に対して写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = ax + b$ で定めるとき、f が線形写像であるための必要十分条件を求めよ。

解答例. すべての線形写像は $\boldsymbol{o}$ を $\boldsymbol{o}$ に写す。今の場合 $f(0) = b$ であるから、$b = 0$ であることが必要。逆は例 2.4 の特別な場合である。 □

線形写像 $f : V \to W$ が**同型写像**であるとは、f が全単射であることである。たとえば例 2.4 の線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は同型写像である。（任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ となるから。）一般に、n 次正方行列 A が定める線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が同型写像であるための必要十分条件は、$|A| \neq 0$ である。（これは非常に重要。）

3 ベクトル空間の基底（復習）

V をベクトル空間とする。（$V = \mathbb{R}^n$ と思ってよい。）ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ が**一次従属**であるとは、一次関係式

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}$$

を満たす実数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ で、<u>少なくともどれか一つは 0 でないもの</u> が存在するときをいう。このような関係式を**自明でない一次関係式**という。

例 3.1 $V = \mathbb{R}^2$ で、

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 0),\ \boldsymbol{x}_2 = (0, 1),\ \boldsymbol{x}_3 = (1, 1)$$

とすると $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{o}$ となるので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は一次従属である。

練習問題 3.2 $V = \mathbb{R}^3$ で、

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1)$$

とする。このとき $\boldsymbol{x}_4 \in \mathbb{R}^3$ をどうとっても $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は一次従属であることを示せ。

解答例　$\boldsymbol{x}_4 = (a, b, c)$ とすると

$$\boldsymbol{x}_4 = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3$$

が成り立つ。よって $a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$ である。$\boldsymbol{x}_4$ の係数が 0 でないので、これは自明でない一次関係式である。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は一次従属である。 □

ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ が**一次独立**であるとは、一次従属でないときをいう。すなわち一次関係式

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}$$

が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ のときに限るときをいう。（つまり、自明でない一次関係式をもたないときをいう。）

例 3.3 $V = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1)$ とすると $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は一次独立である。実際、

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

となるので、$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ となるのは $a_1 = a_2 = 0$ の場合だけである。

練習問題 3.4 $V = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (-1, 1)$ とすると $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は一次独立であることを示せ。

解答例

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 - a_2\\a_2\end{pmatrix}$$

となるので、$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ となるのは $a_1 = a_2 = 0$ の場合だけである。 □

ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in V$ の**一次結合**とは、

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m$$

の形のベクトルのことをいう。また、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ の一次結合の全体

$$\{a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m \mid a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}\}$$

のことを、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ が張る（または生成する）部分空間といい、記号

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m \rangle$$

で表す。

例 3.5 $V=\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{x}_2=(0,0,1)$ とするとき、$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle$ は xz 平面

$$\{(x,0,z)\,|\,x,z\in\mathbb{R}\}$$

である。

ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in V$ が V の**基底**であるとは、次の二つの条件を満たすことをいう：
(i) $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\rangle = V$,
(ii) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ は一次独立。

例 3.6 $V=\mathbb{R}^2$ において、$\boldsymbol{x}_1=(1,0),\boldsymbol{x}_2=(0,1),\boldsymbol{x}_3=(1,1)$ は (i) をみたすが (ii) を満たさないので基底ではない。一方、$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ は (i),(ii) ともにみたすので基底である。同様に $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3$ と、$\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ も V の基底である。

練習問題 3.7 $V=\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{x}_2=(-1,1)$ とすると $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ は V の基底であることを示せ。

解答例　一次独立であることは例 3.4 で示した。

$$a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}a_1-a_2\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

より $a_2=b_2$, $a_1=b_1+b_2$ となるので $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\rangle=\mathbb{R}^2$ である。よって基底である。
□

この例からもわかるように、<u>ベクトル空間の基底の取り方は一意的ではない。</u>

命題 3.8 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が V の基底のとき、それぞれに *0* でない数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ をかけて得られるベクトルの組 $c_1\boldsymbol{x}_1,c_2\boldsymbol{x}_2,\cdots,c_n\boldsymbol{x}_n$ も V の基底である。　□

証明. $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\rangle=V$ であるから、任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$$

となる $a_1,\cdots,a_n$ が存在する。よって

$$\boldsymbol{x}=\frac{a_1}{c_1}(c_1\boldsymbol{x}_1)+\frac{a_2}{c_2}(c_2\boldsymbol{x}_2)+\cdots+\frac{a_n}{c_n}(c_n\boldsymbol{x}_n)$$

となるので $\langle c_1\boldsymbol{x}_1,c_2\boldsymbol{x}_2,\cdots,c_n\boldsymbol{x}_n\rangle=V$ となり基底の条件 (i) が成立する。また

$$a_1(c_1\boldsymbol{x}_1)+a_2(c_2\boldsymbol{x}_2)+\cdots+a_n(c_n\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{o}$$

とすると $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であることから $a_1c_1 = a_2c_2 = \cdots = a_nc_n = 0$ となる。$c_1c_2\cdots c_n \neq 0$ であるから $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ となる。よって $c_1\boldsymbol{x}_1, c_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, c_n\boldsymbol{x}_n$ は一次独立である。すなわち基底の条件 (ii) を満たす。

以上により $c_1\boldsymbol{x}_1, c_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, c_n\boldsymbol{x}_n$ は V の基底である。 □

$V = \mathbb{R}^n$ のとき、第 i 成分だけが 1 であとの成分はすべて 0 であるようなベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ とすると、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は V の基底である。これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という。$\mathbb{R}^n$ ではこの基底を使うことが多い。しかしながら、たとえば例 2.2 のようなベクトル空間に対しては、自然な基底の取り方は存在しないことに注意する。

V をベクトル空間、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底とするとき、V の次元は n 次元であるといい、$\dim V = n$ と表す。すなわち、ベクトル空間の**次元**とは、基底をなすベクトルの個数のことである。たとえば

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

である。

例 3.9

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$$

とする。例 2.2 より V はベクトル空間である。（行列 A として 1×3 行列 $(1, 2, 3)$ をとればよい。）

$$\boldsymbol{x}_1 = (2, -1, 0),\ \boldsymbol{x}_2 = (3, 0, -1)$$

とすると $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ である。これらが一次独立であることは容易にわかる。（各自確かめよ。）また $(x, y, z) \in V$ とすると、$x = -2y - 3z$ なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -y\boldsymbol{x}_1 - z\boldsymbol{x}_2$$

となるので $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = V$ となる。よって (i), (ii) ともにみたすので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は V の基底である。したがって $\dim V = 2$ である。

練習問題 3.10 上の例をまねることにより、

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z - w = 0\}$$

の基底と次元を求めよ。

解答例　省略。

練習問題 3.11 同様にして、

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - w = x - y + z - w = 0\}$$

の基底と次元を求めよ。

解答例. $x + y - z - w = 0$ と $x - y + z - w = 0$ を辺辺足して $x = w$ を得る。また辺辺引くと $y = z$ を得る。逆に $x = w$, $y = z$ のとき、$(x, y, z, w) \in V$ であるから V の任意の元は (a, b, b, a) の形で書ける。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 1, 0)$ は V を張る。(すなわち $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = V$.) またこれらが一次独立であることは、一方が他方の定数倍でないことから明らか。よって $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ は V の基底である。よって $\dim V = 2$. □

4 基底と線形写像

V, W をベクトル空間とし、$\dim V = n$, $\dim V = m$ とする。($V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ と思えばよい。) $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底とする。このとき、線形写像 $f : V \to W$ に関して

$$f(a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n) = a_1 f(\boldsymbol{x}_1) + a_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + a_n(\boldsymbol{x}_n)$$

が成り立つので、V の任意の元の行き先は基底の行き先 $f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ を与えれば自動的に決まってしまう。このようにして定まった写像 f は線形写像である。実際、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{x}_i$$

とすると

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\boldsymbol{x}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)f(\boldsymbol{x}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i f(\boldsymbol{x}_i)+\sum_{i=1}^{n}b_i f(\boldsymbol{x}_i) \\
&= f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}), \\
f(c\boldsymbol{x}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n}ca_i\boldsymbol{x}_i\right) \\
&= cf\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{x}_i\right) \\
&= cf(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

となるから。

例 4.1 $V=W=\mathbb{R}^2$ とし、V の基底として標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ をとる。$f:V\to W$ を $f(\boldsymbol{e}_1)=(a,c),\ f(\boldsymbol{e}_2)=(b,d)$ を満たす線形写像とすると

$$
f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)=xf(\boldsymbol{e}_1)+yf(\boldsymbol{e}_2)=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}
$$

となるので f は行列

$$
\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}
$$

を掛ける写像である。

以下では、ベクトル空間が同型であるためには次元が等しいことが必要十分であることを示す。

命題 4.2 V,W をベクトル空間とするとき、同型写像 $f:V\to W$ が存在すれば $\dim V=\dim W$ である。 □

証明. V の基底 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ に対して $f(\boldsymbol{x}_1),\cdots,f(\boldsymbol{x}_n)$ が W の基底であることを示せばよい。まずこれらが W を張ること（すなわち基底の条件 (i)) を示す。f が全射であることから、任意の元 $\boldsymbol{y}\in W$ に対して $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in V$ が存在する。$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$ とすると、f の線形性より

$$
\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=a_1f(\boldsymbol{x}_1)+\cdots+a_nf(\boldsymbol{x}_n)
$$

となる。これは $\boldsymbol{y}$ が $f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ の一次結合であることを意味する。よって

$$f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$$

は W を張る。

次に $f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ が一次独立であること（基底の条件 (ii)) を示す。そのために

$$a_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}$$

とおくと f の線形性より $f(a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}$ である。ここで f は単射であるから、$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$ でなければならない。よって $a_1 = \cdots = a_n = 0$ となる。よって $f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ は一次独立である。

以上により $f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ は W の基底である。 □

証明から次がわかる：

命題 4.3 線形写像 $f : V \to W$ が単射のとき、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ が一次独立ならば $f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ も一次独立である。また、f が全射のとき、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in V$ が V を張るならば、$f(\boldsymbol{x}_1), \cdots, f(\boldsymbol{x}_n)$ も V を張る。 □

最後に次元が等しければ同型であることを示す。

命題 4.4 V, W を次元の等しいベクトル空間とすると、同型写像 $f : V \to W$ が存在する。 □

証明. $\dim V = \dim W = n$ とし、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底、$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ を W の基底とする。このとき、$f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{y}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ により定まる線形写像を f とし、f が同型写像であることを示す。$g : W \to V$ を $g(\boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ により定まる線形写像とすると、g は f の逆写像になる。実際、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して、$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n$ とすると

$$\begin{aligned}
g(f(\boldsymbol{x})) &= g(f(a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n)) \\
&= g(a_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{y}_n) \\
&= a_1 g(\boldsymbol{y}_1) + \cdots + a_n g(\boldsymbol{y}_n) \\
&= a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n \\
&= \boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

となる。また任意の $y \in W$ に対して $y = b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{y}_n$ と表せば

$$
\begin{aligned}
f(g(\boldsymbol{y})) &= f(g(b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{y}_n)) \\
&= f(b_1 g(\boldsymbol{y}_1) + \cdots + b_n g(\boldsymbol{y}_n)) \\
&= f(b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{x}_n) \\
&= b_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + b_n(\boldsymbol{x}_n) \\
&= b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{y}_n) \\
&= \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

となる。以上より g は f の逆写像なので、f は全単射である。よって f は同型写像である。 □

以上