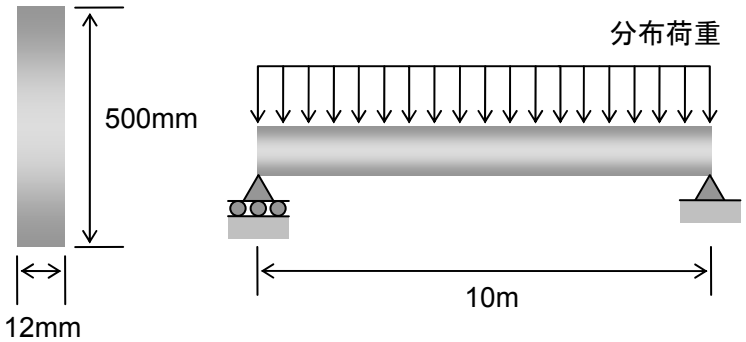
1. 図-1 に示す矩形断面のはりについて以下の問いに答えなさい。はりの自重は無視する。

(1) 断面 2 次モーメントを求めなさい。

(2) はりに 10KN/m の分布荷重が載荷されたときのモーメントとせん断力の分布を求め、図示しなさい。

(3) (2) で求めたモーメントおよびせん断力の最大に対して、はりの内部に生じる曲げ応力およびせん断応力を計算しなさい。

(4) スパンの中央および 1/4 点の断面において、はりの上下端、中立軸位置、および上から 1/4 の位置での主応力の大きさおよび方向を求めなさい。



(a) はりの断面　　(b) 単純はり

図-1

(1)

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 500^3}{12} = 125 \times 10^6 \ (\mathrm{mm}^4)$$

(2)

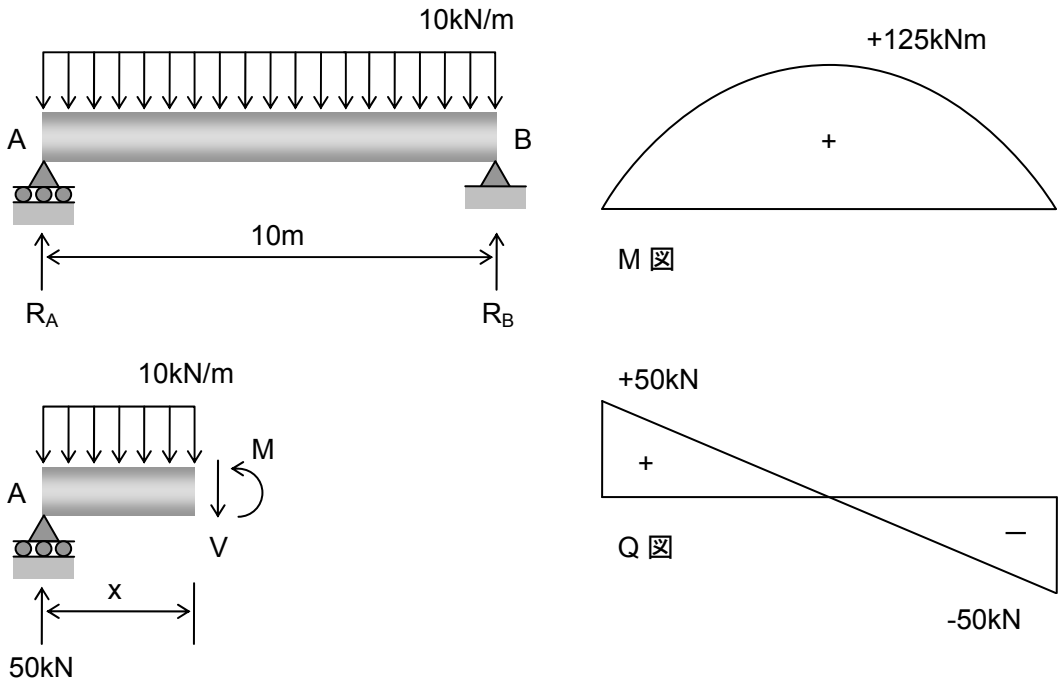
$$R_A = R_B = \frac{10\mathrm{kN/m} \times 10\mathrm{m}}{2} = 50 \ (\mathrm{kN})$$

下図の Free body diagram を考えて

$$M(x) + 10x \cdot \frac{x}{2} - 50x = 0 \qquad M(x) = -5x^2 + 50x$$

$$V(x) + 10x - 50 = 0 \qquad V(x) = -10x + 50$$

これよりモーメント図，せん断力図を求めると以下のようになる



(3)

$$M_{max} = 125\ (\mathrm{kN \cdot m}),\quad V_{max} = 50\ (\mathrm{kN})$$

であり，このときの断面内の曲げ応力分布，せん断応力分布を求める

曲げ応力の分布は

$$\sigma = \frac{M_{max}}{I} y = \frac{125\mathrm{kNm}}{125 \times 10^6 \mathrm{mm}^4} y = 1 \cdot y\ (\mathrm{MPa})$$

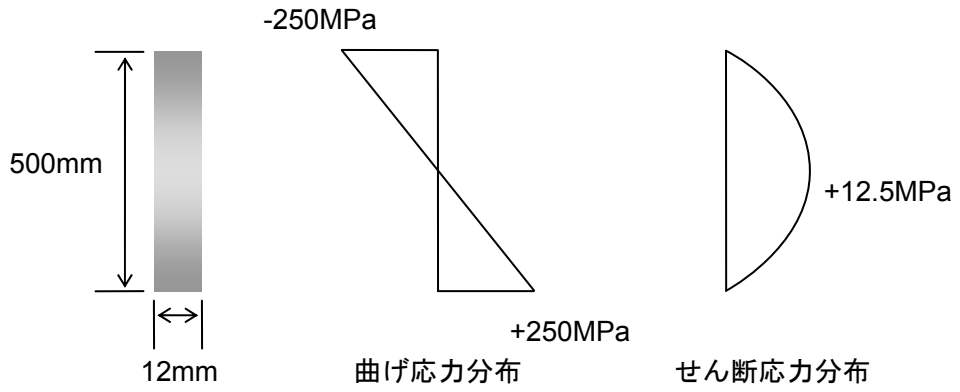
せん断応力の分布は，断面 1 次モーメント

$$Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = 6\left(62500 - y^2\right)$$

を用いて

$$\tau = \frac{V_{max} Q}{It} = \frac{50 \times 10^3 \mathrm{N} \cdot 6\left(62500 - y^2\right)\mathrm{mm}^3}{125 \times 10^6 \mathrm{mm}^4 \cdot 12\mathrm{mm}} = 0.2 \times 10^{-3}\left(62500 - y^2\right)$$

得られた曲げ応力分布とせん断応力分布を図示すると以下のようになる



【ポイント】

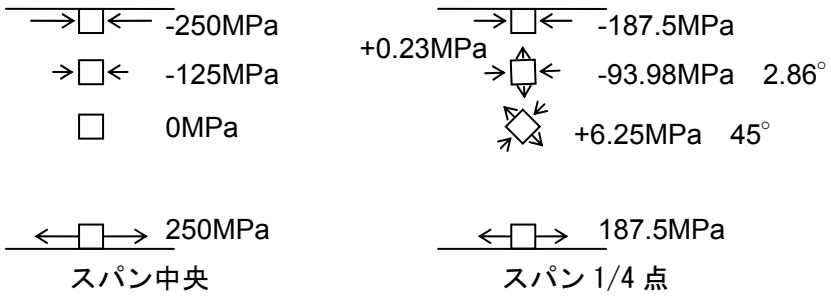
Narrow Rectangular Beam の場合，せん断応力の最大値は平均せん断応力（せん断力を断面積で割ったもの）の 1.5 倍であることを覚えておくと良い！！

(4)

求めた断面内での曲げ応力, せん断応力の分布より, スパン中央および 1/4 点での曲げ応力, せん断応力は以下のようになる

中央	上端	$\sigma = -250$ (MPa)	$\tau = 0$ (MPa)
	1/4 位置	$\sigma = -125$ (MPa)	$\tau = 0$ (MPa)
	中立軸位置	$\sigma = 0$ (MPa)	$\tau = 0$ (MPa)
	下端	$\sigma = 250$ (MPa)	$\tau = 0$ (MPa)
1/4 点	上端	$\sigma = -187.5$ (MPa)	$\tau = 0$ (MPa)
	1/4 位置	$\sigma = -93.75$ (MPa)	$\tau = 4.69$ (MPa)
	中立軸位置	$\sigma = 0$ (MPa)	$\tau = 6.25$ (MPa)
	下端	$\sigma = 187.5$ (MPa)	$\tau = 0$ (MPa)

主応力の大きさと方向は下図のようになる



2. 2 本の矩形断面（80mm × 120mm）の木製部材が図-2 のように接着剤で接合されている。角度 β が 22 度、引張りに対する許容応力（接合面に直角方向）が 400kPa、せん断に対する許容応力（接合面に平行方向）が 600kPa の場合にこの部材が耐えられる引張力 P を求めよ。

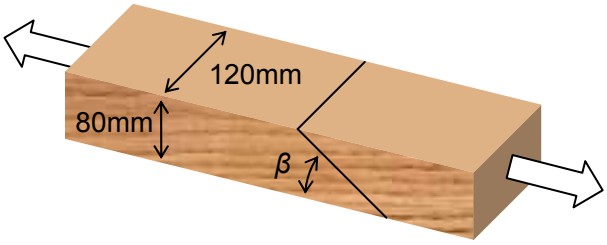
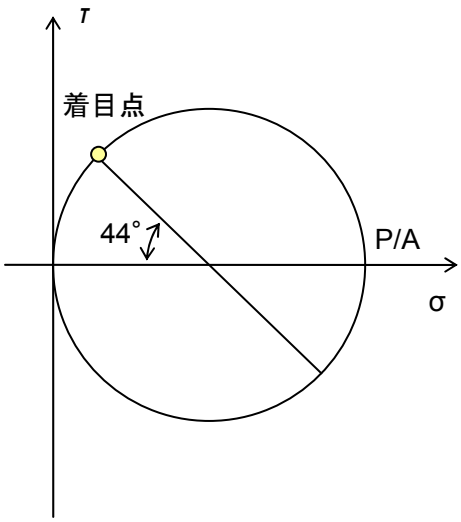


図-2

与えられた応力状態でモールの応力円を描く



図中の着目点の応力を求める

$$\tau = \frac{P}{2A}\sin 44^\circ = \frac{P}{A}\frac{\sin 44^\circ}{2} = 0.3473\frac{P}{A}$$

$$\sigma = \frac{P}{2A}\left(1-\cos 44^\circ\right) = \frac{P}{A}\frac{\left(1-\cos 44^\circ\right)}{2} = 0.1403\frac{P}{A}$$

これらの応力が許容応力より小さくなるような引張力 P を算出する

$$\tau = 0.3473\frac{P}{80\text{mm}\cdot 120\text{mm}} \le 0.6\text{MPa} \qquad P \le 16.58\ (\text{kN})$$

$$\sigma = 0.1403\frac{P}{80\text{mm}\cdot 120\text{mm}} \le 0.4\text{MPa} \qquad P \le 27.36\ (\text{kN})$$

よって，許容引張力は$P = 16.58\ (\text{kN})$

【別解】

テンソルを使って 22°傾いた断面（-68°回転させた面）における応力を求めても上記と同じ結果が得られる

$$\sigma_{1'1'} = \sigma_{11}\cos^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta$$

$$\sigma_{1'1'} = \frac{P}{A}\cos^2(-68^\circ) + 2\cdot 0\cdot\sin(-68^\circ)\cos(-68^\circ) + 0\cdot\sin^2(-68^\circ)$$

$$= \frac{P}{A}\cos^2(-68^\circ) = 0.1403\frac{P}{A}$$

$$\sigma_{1'2'} = \left(-\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$\sigma_{1'2'} = \left(-\frac{P}{A} + 0\right)\sin(-68^\circ)\cos(-68^\circ) + 0\cdot\left(\cos^2(-68^\circ) - \sin^2(-68^\circ)\right)$$

$$= -\frac{P}{A}\sin(-68^\circ)\cos(-68^\circ) = 0.3473\frac{P}{A}$$

これらの応力が許容応力より小さくなるような引張力 P を算出する

$$\sigma_{1'2'} = 0.3473\frac{P}{80\text{mm}\cdot 120\text{mm}} \le 0.6\text{MPa} \qquad P \le 16.58\ (\text{kN})$$

$$\sigma_{1'1'} = 0.1403\frac{P}{80\text{mm}\cdot 120\text{mm}} \le 0.4\text{MPa} \qquad P \le 27.36\ (\text{kN})$$

よって，許容引張力は$P = 16.58\ (\text{kN})$

3. 図-3 に示す両端を固定したはりについて以下の問いに答えよ。はりの自重は無視する。

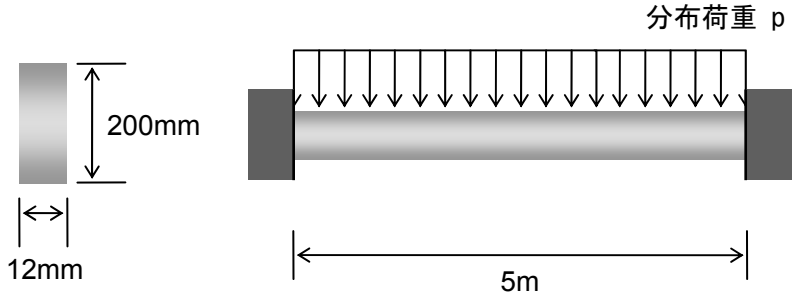
(1) 等分布荷重 p が載荷されたときの A,B 端での反力と固定端モーメントを求めよ。

(2) はりに発生する曲げモーメント分布を描け。

(3) 等分布荷重が徐々に大きくなったときに最初に降伏する位置および 2 番目に降伏する位置を図示せよ。

(4) 断面が図示する寸法であり、材料の降伏点が 240MPa の場合、この断面の降伏モーメントおよび塑性モーメントを求めよ。

(5) 最初に降伏するときの等分布荷重の強度を求めよ。



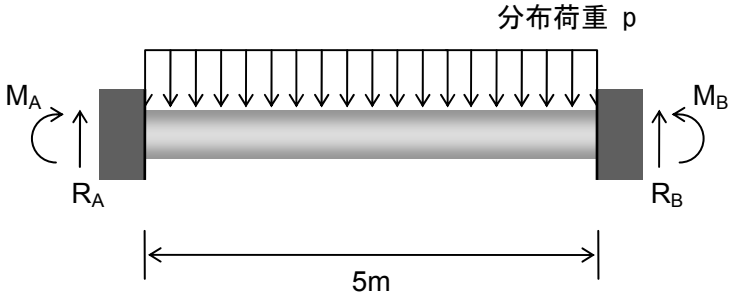
(a) はりの断面　　(b) 両端固定はり

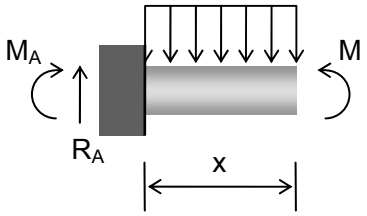
図-3

(1)

下に示す Free body diagram から曲げモーメントを求める

$$M(x)+px\frac{x}{2}-R_A x-M_A=0 \qquad M(x)=-\frac{px^2}{2}+R_A x+M_A$$





$EI\dfrac{d^2w}{dx^2}=M(x)$ より

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{px^2}{2}+R_A x+M_A$$

$$EI\frac{dw}{dx}=-\frac{px^3}{6}+\frac{R_A}{2}x^2+M_A x+C_1$$

$$EIw=-\frac{px^4}{24}+\frac{R_A}{6}x^3+\frac{M_A}{2}x^2+C_1 x+C_2$$

$x=0 \Rightarrow w=0, \theta=0$ より $C_1=C_2=0$

$x=5 \Rightarrow w=0, \theta=0$ より

$$EIw=-\frac{p\cdot 5^4}{24}+\frac{R_A}{6}5^3+\frac{M_A}{2}5^2=0 \qquad -\frac{25p}{6}+\frac{5R_A}{6}+M_A=0$$

$$EI\frac{dw}{dx}=-\frac{p5^3}{6}+\frac{R_A}{2}5^2+M_A 5=0 \qquad -\frac{25p}{12}+\frac{5R_A}{3}+M_A=0$$

M_A を消去して

$$-\frac{25p}{12}+\frac{5R_A}{6}=0 \qquad R_A=\frac{5p}{2}$$

これを代入して

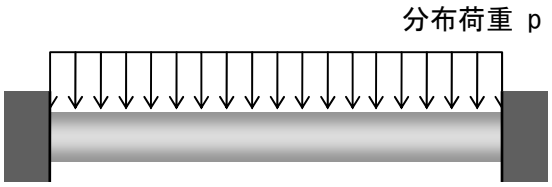
$$M_A=-\frac{25p}{12}$$

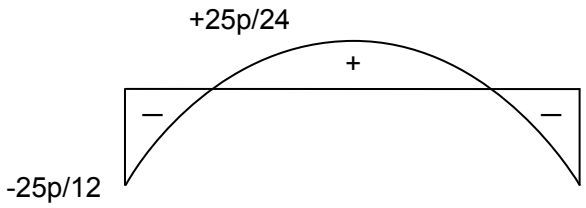
左右対称だから

$$M_B = M_A = -\frac{25p}{12}$$

(2)

$$M(x) = -\frac{px^2}{2} + \frac{5px}{2} - \frac{25p}{12}$$ より





(3)

曲げモーメント図より，最初に降伏する位置は端部であり，2 番目に降伏する位置は中央部であることがわかる

(4)

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I} c$$ より

$$240\text{MPa} = \frac{M_y}{\frac{12 \cdot 200^3}{12}\text{mm}^4} 100\text{mm} \qquad M_y = 19.2\ (\text{kN} \cdot \text{m})$$

また $M_u = \frac{3}{2} M_y$ より

$$M_u = 28.8\ (\text{kN} \cdot \text{m})$$

(5)

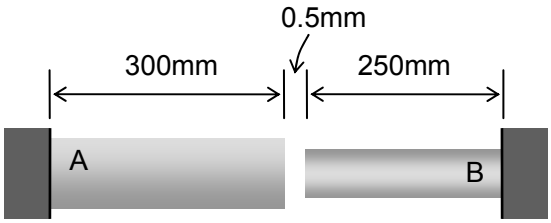
$$M_y = \frac{25p_y}{12} = 19.2 \qquad p_y = 9.22\ (\text{kN/m})$$

4. 図-4 に示すように、アルミの棒とステンレスの棒が、温度 20℃のときに 0.5mm のギャップが存在するように壁に固定されている。

(1) ギャップが 0mm となる温度を求めよ。

(2) 温度が 140℃となったときにアルミ棒およびステンレス棒の中に生じる応力を求めよ。

(3) 140℃となったときのアルミ棒の長さの変化量を求めよ。



Aluminum
A = 2000 mm^2
E = 75 GPa
α = 23×10^{-6} /°C

Stainless steel
A = 800 mm^2
E = 190 GPa
α = 17.3×10^{-6} /°C

図-4

(1)

温度の変化量をΔt とすると

$$300\cdot 23\times 10^{-6}\cdot \Delta t+250\cdot 17.3\times 10^{-6}\cdot \Delta t=0.5 \qquad \Delta t=44.54\ (^{\circ}C)$$

よって

$$t=20+\Delta t=64.54\ (^{\circ}C)$$

(2)

温度が 64.54℃のときにギャップが 0mm となるから，64.54℃から 140℃まで変化したときに材料が伸びる量をキャンセルするのに必要な力を算出すればよい

拘束がないと仮定して，64.54℃から 140℃に変化したときの伸び量は

$$300\cdot 23\times 10^{-6}\cdot (140-64.54)+250\cdot 17.3\times 10^{-6}\cdot (140-64.54)=0.847\ (mm)$$

この伸び分を縮めるのに必要な力を P とすると

$$\sigma=\frac{P}{A}=E\varepsilon=E\frac{\Delta l}{l}$$ より

それぞれの棒の伸び量をΔl_A，Δl_Bとして

$$\frac{P}{2000mm^2}=75\times 10^3 MPa\cdot \frac{\Delta l_A}{300mm} \qquad \Delta l_A=2.0\times 10^{-6}P\ (mm)$$

$$\frac{P}{800mm^2}=190\times 10^3 MPa\cdot \frac{\Delta l_B}{250mm} \qquad \Delta l_B=1.645\times 10^{-6}P\ (mm)$$

$\Delta l_A+\Delta l_B=0.847mm$ より

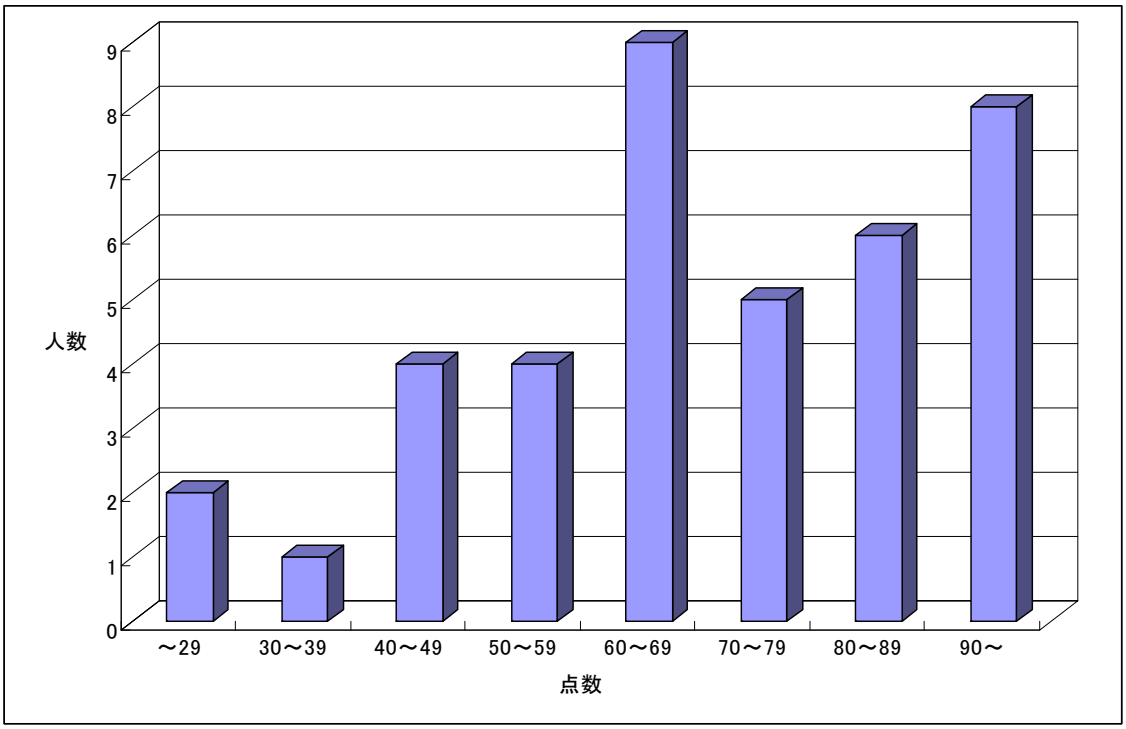
$$\Delta l_A+\Delta l_B=(2.0+1.645)\times 10^{-6}P=0.847mm \qquad P=232.4kN$$

よって

$$\sigma_A=\frac{-232.4\times 10^3 N}{2000mm^2}=-116\ (MPa) \qquad \sigma_B=\frac{-232.4\times 10^3 N}{800mm^2}=-290\ (MPa)$$

(3)

$$300\cdot 23\times 10^{-6}\cdot (140-20)-\Delta l_A=0.828-2.0\times 10^{-6}\cdot 232.4\times 10^3=0.363\ (mm)$$

成績

講義の成績の分布は以下に示すとおりです.