

# 確率と統計(O)

## 「積率と積率母関数(第5章)」

- 担当教員： 杉山 将（計算工学専攻）
- 居室： W8E-505
- 電子メール: [sugi@cs.titech.ac.jp](mailto:sugi@cs.titech.ac.jp)
- 授業のウェブサイト：  
<http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/>

# 確率変数のばらつきの指標

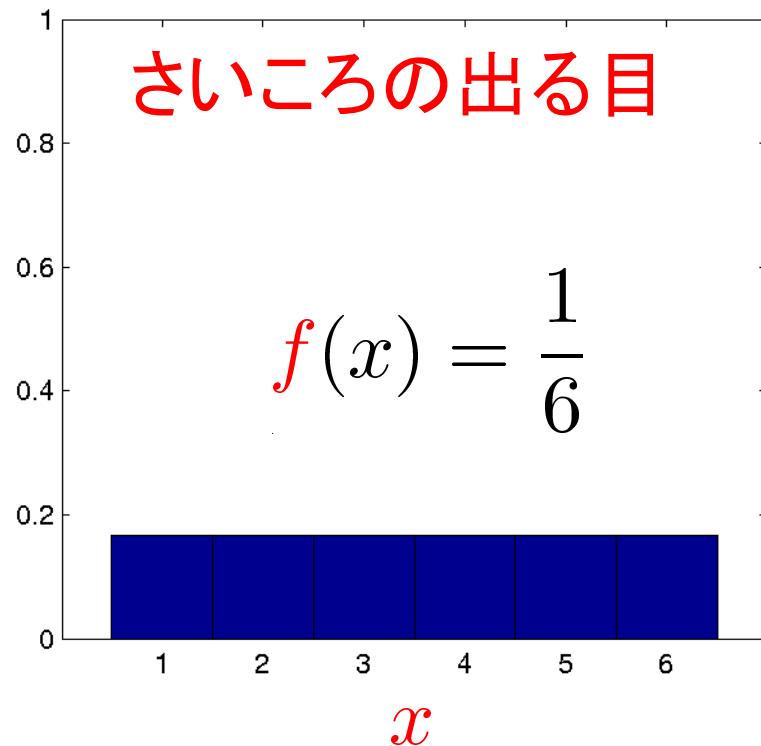
- 期待値は確率変数の代表する値を表す指標
- 分散(variance): 確率変数の散らばり具合を表す指標

$$V(X) = E\{(X - E[X])^2\}$$

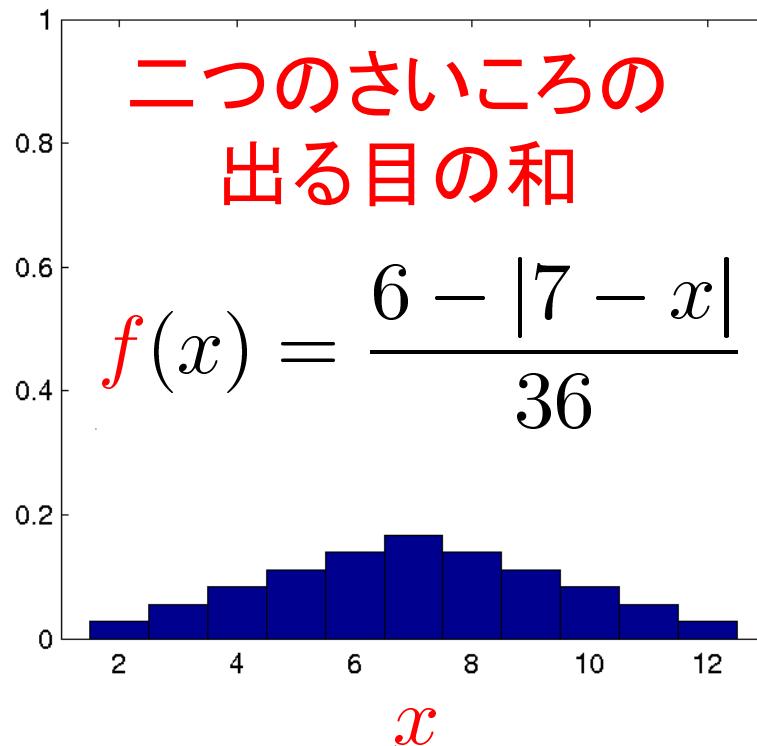
- 次式の方が計算しやすいこともある

$$\begin{aligned} V(X) &= E\{X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2\} \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

# 例



期待値:  $7/2$   
分散:  $35/12$



期待値: 7  
分散:  $35/6$

# 演習

- 1, 2, 3, 4が $1/4$ の確率で出る4面体のさいころを考える。

$$f(x) = \frac{1}{4}$$

1. さいころの出る目  $X$  の期待値と分散を求めよ。
2. さいころの出る目 + 2 ( $X + 2$ ) の期待値と分散を求めよ。
3. さいころの出る目 × 2 ( $2X$ ) の期待値と分散を求めよ。

# 分散演算の性質

- 定数の分散はゼロ

$$V(c) = 0$$

- 定数を足したものの分散は、もとの分散と等しい

$$V(X + c) = V(X)$$

- 定数倍の分散は、もとの分散に定数の2乗をかけたものと等しい

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

- 証明は宿題！

# 標準偏差と標準化

- 標準偏差(standard deviation): 分散の平方根

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

- 分散の値を  $\sigma^2$ で、標準偏差の値を  $\sigma$  で表わすことが多い
- 標準化(standardization): 任意の確率変数  $X$  に対して

$$Z = \frac{X - E(X)}{D(X)}$$

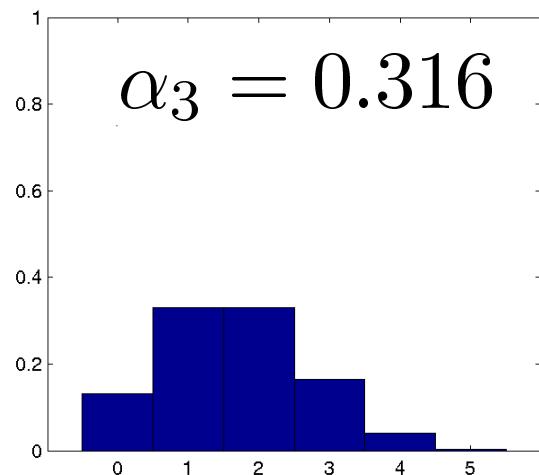
と定義すれば、 $Z$  は期待値0、分散1になる

# 確率分布の形の指標(1)

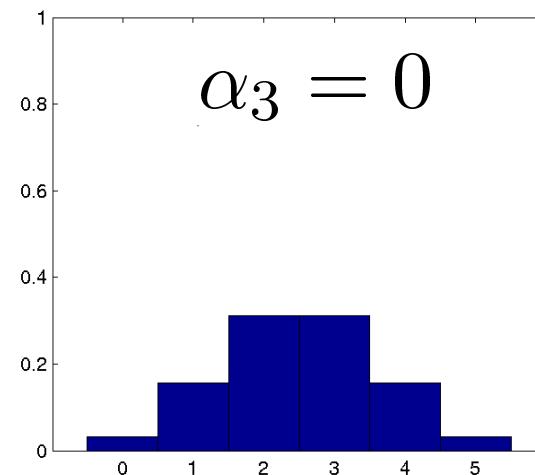
52

■ 歪度(skewness)  $\alpha_3$  : 確率分布の非対称性を表わす

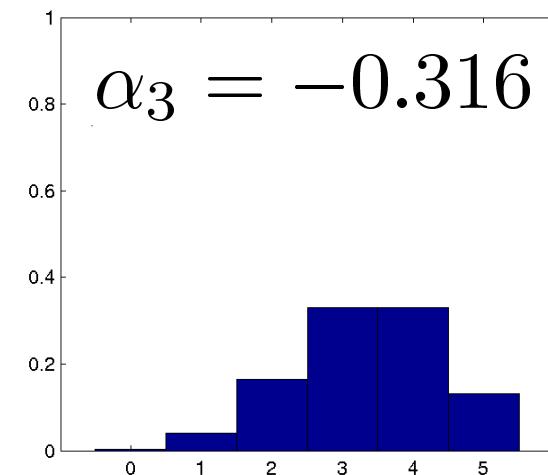
$$\alpha_3 = \frac{E\{[X - E(X)]^3\}}{\{D(X)\}^3}$$



右すそが長い



左右対称



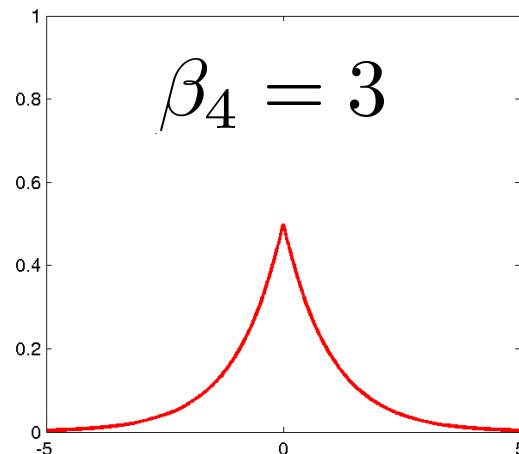
左すそが長い

# 確率分布の形の指標(2)

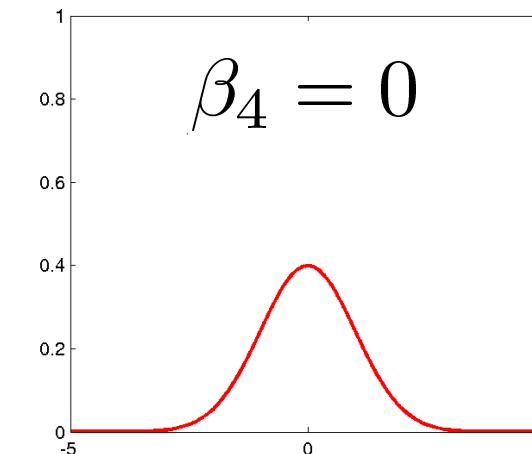
53

■ 尖度(kurtosis)  $\beta_4$  : 確率分布の尖り具合を表わす

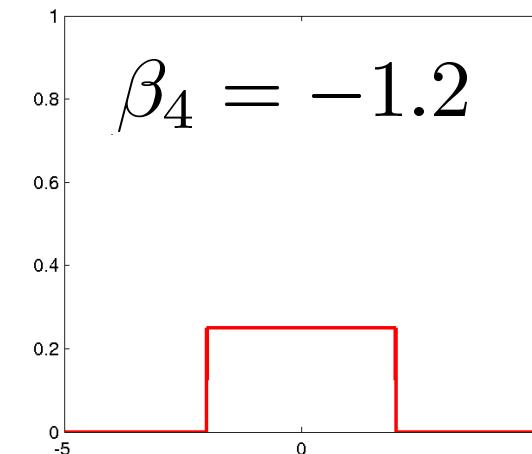
$$\beta_4 = \frac{E\{[X - E(X)]^4\}}{\{D(X)\}^4} - 3$$



尖っている



標準的な尖り具合  
(正規分布)



尖っていない

# 積率

- 確率分布は、期待値、分散、歪度、尖度を指定していくと、形が限定されていく
- r次の積率(moment):

$$\mu_r = E[X^r]$$

- 期待値まわりのr次の積率:

$$\nu_r = E[(X - E[X])^r]$$

- 全ての次数の積率を指定すれば、確率分布を一意に決定することができる

# 積率母関数

- 積率母関数(moment generating function): 全ての次数の積率を生成する関数(詳細は次ページ)

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) \\ \int e^{tx} f(x) dx \end{cases}$$

- 但し、積率母関数は存在しない(無限大に発散する)こともある

# 積率母関数と積率

- 定理: 積率母関数の導関数にゼロを代入すれば積率が得られる.

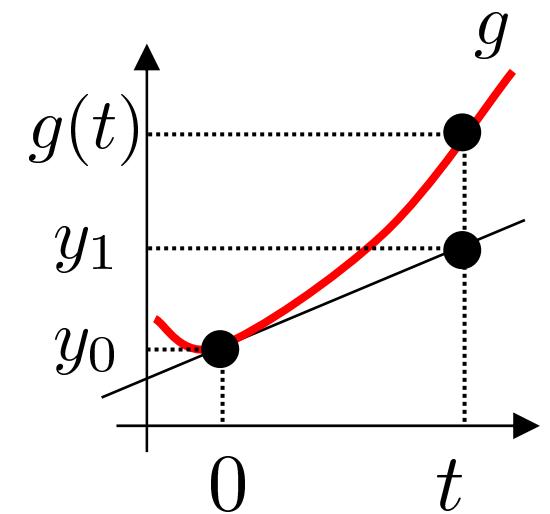
$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r$$

- 証明の前に復習:

(原点周りの)テーラー展開:

$g(t)$  が無限回微分可能なとき

$$g(t) = g(0) + t \frac{g'(0)}{1!} + t^2 \frac{g''(0)}{2!} + \dots$$



$$y_0 = g(0)$$

$$y_1 = g(0) + t \frac{g'(0)}{1!}$$

# 積率母関数と積率(続き)

■ 証明: まず,  $e^{tX}$  を原点周りでテーラー展開する.

$$e^{tX} = 1 + (tX) + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots$$

両辺の期待値を取れば,

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

$$g(t) = e^{tX}$$

$$g^{(r)}(t) = X^r e^{tX}$$

$$g^{(r)}(0) = X^r$$

$$= E[1] + tE[X] + t^2 \frac{E[X^2]}{2!} + t^3 \frac{E[X^3]}{3!} + \dots$$

$$= 1 + t\mu_1 + t^2 \frac{\mu_2}{2!} + t^3 \frac{\mu_3}{3!} + \dots$$

$$\mu_r = E[X^r]$$

# 積率母関数と積率(続き)

58

■ 両辺を微分すれば

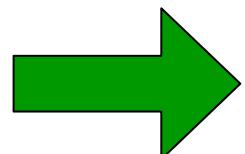
$$M_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!} t^2 + \frac{\mu_3}{3!} t^3 + \dots$$

$$M'_X(t) = \mu_1 + \mu_2 t + \frac{\mu_3}{2!} t^2 + \frac{\mu_4}{3!} t^3 + \dots$$

$$M''_X(t) = \mu_2 + \mu_3 t + \frac{\mu_4}{2!} t^2 + \frac{\mu_5}{3!} t^3 + \dots$$

⋮

$$M_X^{(r)}(t) = \mu_r + \mu_{r+1} t + \frac{\mu_{r+2}}{2!} t^2 + \frac{\mu_{r+3}}{3!} t^3 + \dots$$



$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r \quad (\text{Q. E. D.})$$

# 宿題

1. 以下の分散の性質を証明せよ.

A)  $V(c) = 0$

B)  $V(X + c) = V(X)$

C)  $V(cX) = c^2V(X)$

2. 歪度, 尖度を(原点周りの)積率を用いて表せ.

**ヒント:** 分散は, 原点周りの積率を用いて

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

と表すことができる.

# 連絡事項

- 5月1日(金)は、海外出張のため休講です