期末試験について

範囲: 中間試験で範囲にならなかったところすべて
持ち込み禁止
遅刻・欠席はその原因を証明する公的書類を提出した場合だけ追試験または試験時間の延長を行う
試験の傾向：演習問題の類題、特に点推定、仮説検定、区間推定から必ず出題する。多次元の正規分布も範囲内なので、注意すること。

配点：中間試験 50 点、期末試験 50 点、演習 20 点程度の予定

積率 (またはモーメント)

確率変数 X が与えられたとき $E[X^k]$ を原点のまわりの k 次モーメントと呼び、$E[(X-E[X])^k]$ を期待値のまわりの k 次モーメントと呼ぶ。
また X のモーメント母関数 $M_X(t)$ を $E[\exp(tX)]$ で定義する。$M_X^{(r)}(t)$ を $M_X(t)$ の r 次導関数とすると $M_X^{(r)}(0) = E[X^r]$ が成立する。このように $M_X(t)$ からすべてのモーメントを再現できるので $M_X(t)$ はモーメント母関数と呼ばれる。

$M_X^{(r)}(0) = E[X^r]$ の証明

X が連続型の場合と離散型の場合に分けて証明する。
連続型の場合: $f_X(x)$ を確率密度関数とする。

$$
\begin{aligned}
M_X^{(r)}(t) &= \frac{d^r}{dt^r} E[\exp(tX)] \\
&= \frac{d^r}{dt^r} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{dt^r} \exp(tx) f_X(x) dx \qquad (1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \exp(tx) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp(tx) f_X(x) dx
\end{aligned}
$$

ここで、式 (1) における積分と微分の順序の交換ができない場合もあるが、説明を簡単にするために交換できない場合は無視した。最後の式に $t = 0$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp(0x) f_X(x) dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx \\
= & E[X^r]
\end{aligned}
$$

2009-12-2

を得る。
離散型の場合: 演習問題

二項分布とベルヌーイ分布

２種類の可能な結果 (例えば成功 S と失敗 F) を生じる実験あるいは観察があり、それらの確率をそれぞれ p, $1-p$ とする。これを同じ条件でかつ独立に n 回繰り返すことを考えよう。これをベルヌーイ試行という。いま S が x 回、F が $n-x$ 回生じる確率は

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

で表わされる。この確率分布を二項分布と呼び $\mathrm{Bi}(n,p)$ で表わす。特に $\mathrm{Bi}(1,p)$ をベルヌーイ分布と呼ぶことがある。
その他にも色々な分布が知られているが、必要になれば適当な教科書を参照すれば理解できるはずなので、網羅的に解説することはしない。

離散型でも連続型でもない確率分布

確率質量 $\Pr[X = x]$ がすべての実数 x でゼロになり、なおかつその累積分布関数 $F_X(x)$ の微分がすべての x について 0 または存在しないような累積分布関数 F_X を構成することができる。$F_X(0) = 0$, $F_X(1) = 1$ になるように作る。

$1/3 \leq x \leq 2/3$ において $F_X(x) = 1/2$ と定める。

左側 1／3 が残っているので $1/9 \leq x \leq 2/9$ において $F_X(x) = 1/4$ と定め、右側 1／3 を $7/9 \leq x \leq 8/9$ において $F_X(x) = 3/4$ と定める。このように値がまだ定まっていない部分を 3 分割して、真ん中の閉区間の値を中間の値に定める手続きを繰り替えして、関数の値をすべての $0 \leq x \leq 1$ について定める。

この関数をカントールの階段関数または悪魔の階段などと呼ぶ。1 回目の操作で値が定義される幅は $1/3$ で、2 回目は $2/9 = (1/3) \times (2/3)$, 3 回目は $4/27 = (1/3) \times (2/3)^2$ である。したがってこの操作を繰り返すと値が定義される範囲は

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 1$$

となり、$0 < x < 1$ のすべての範囲で関数の値が

きちんと定義される (ような気になる)。$x \leq 0$ なら $F_X(x) = 0$, $1 \leq x$ なら $F_X(x) = 1$ と定義する。

階段関数の微分と連続性

前のページで定めた F_X の $0 < x < 1$ に置ける微分を考える。階段関数の n 回目の値の定義で x を定めたとするとある a, b を用いて $a/3^n \leq x \leq b/3^n$ が成立する。もし $a/3^n < x < b/3^n$ ならば x における F_X の微分はその前後で関数 F_X の形がたいらなので 0 である。$x = a/3^n$ または $x = b/3^n$ ならば F_X の微分は存在しないか 0 である。どちらにせよ X の確率密度を表す関数は存在しないことがわかる。

また、$F_X(x)$ はすべての x について連続であることを証明できる (演習問題)。確率質量 $P_X(x) > 0$ となる x において必ず $F_X(x)$ は不連続であるから、対偶をとり $P_X(x) > 0$ となる x が存在しないことがわかる。

このように連続型でも離散型でもない場合も含むすべての確率変数に期待値を定義することができるが、定義するためにルベーグ積分を用いる必要がある。

演習問題

原則として授業終了までに答案を提出して下さい。終らない場合は授業が行われた日の夜までに南３号館３１１号室前の箱に演習答案を提出して下さい。

2009-12-6

アンケートを鉛筆またはシャーペンで記入し演習提出時に一緒に提出して下さい。
科目コード: 7203, 教員コード: 111531
最後に提出した人に、封筒への署名をお願いします。

演習問題は7月27日以降に南3号館３１１号室前で返却します。

111. ± 1 の値をとる確率変数 X がベルヌーイ分布 $\mathrm{Bi}(1,p)$ に従うとき、モーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよ。
112. 上記 X の原点を中心とする3次のモーメントを計算し $M_X^{(3)}(0)$ と比較せよ。
113. X が離散型確率変数の場合に、$M_X^{(r)}(0) = E[X^r]$ を証明せよ。
114. 階段関数がすべての x で連続であることを証明せよ。(ヒント: 「すべての x_0 について、小さな正の数 ϵ が任意に与えられたとき、小さな正の数 δ をうまくとってやれば、x_0 と δ 以内の距離にあるどんな x に対しても、$f(x)$ と $f(x_0)$ の差を ϵ より小さいようにすることができる」ということが $f(x)$ の連続性の定義である。δ の取り方は x_0 と ϵ に依存して構わない) 確率論と関係ないのでやらなくてもいいですが、正解すれば1点与えます。
115. 授業でわかりにくかった所や要望を書いて下さ

い。また前回の答案および中間試験で×になったところで、理由がわからないところは申し出て下さい。

2009-12-8