期末試験について

範囲: 中間試験で範囲にならなかったところすべて
持ち込み禁止
遅刻・欠席はその原因を証明する公的書類を提出した場合だけ追試験または試験時間の延長を行う
試験の傾向 : 演習問題の類題、特に点推定、仮説検定、区間推定から必ず出題する。

前回演習問題の解説

91. 「プロ野球選手になるために早生まれ (1　3 月生まれ) が不利でない」という仮説を検定するためには、θ に関する両側検定か片側検定かどちらを用いることがより適切か、理由と共に述べよ。
答え : この場合、プロ野球選手の早生まれ率を表わす母数 θ が大きい場合は仮説を棄却せず小さい場合は棄却する。従って両側検定は不適切で片側検定を用いるべきである。
92. この検定における帰無仮説と対立仮説として、適切だと思う仮説を記述せよ。
答え :「プロ野球選手になるために早生まれ (1　3 月生まれ) が不利でない」が帰無仮説で、「プロ野球選

手になるために早生まれ (1　3 月生まれ) が不利である」が対立仮説。別解として「$\theta \geq 0.25$」が帰無仮説で「$\theta < 0.25$」が対立仮説という答えでもよい。
93. 有意水準 5% での T_n の棄却域を述べよ。答えを導いた過程を詳しく書くこと。
答え：T_n がある値より小さいときに仮説を棄却するべきだと考えられる。そこで

$$P_\theta(T_n \leq c) = 0.05$$

となる c を求めればよい。ここで、P_θ の θ として仮説が正しいときに許容される最小値である $\theta = 0.25$ を選ぶ。0.25 よりも大きい値を用いて c を定めると θ が 0.25 のときに $P_\theta(T_n \leq c)$ が 0.05 未満になってしまい不適切である。
$\theta = 0.25$ のときに $E_{\theta=0.25}[X_1] = 0.25$, $V_{\theta=0.25}[X_1] = 3/16$ である。S_n を 10-9 ページと同様に

$$S_n = \frac{\sqrt{n}(T_n - E_\theta[X_1])}{\sqrt{V_\theta[X_1]}} = \frac{4\sqrt{n}(T_n - 0.25)}{\sqrt{3}}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} & P_\theta(T_n \leq c) = 0.05 \\ \Leftrightarrow \quad & P_\theta\left(S_n \leq \frac{4\sqrt{n}(c - 0.25)}{\sqrt{3}}\right) = 0.05 \end{aligned}$$

数表を見ると $P_\theta(S_n \leq -1.645) \approx 0.05$ である。したがって

$$\frac{4\sqrt{n}(c-0.25)}{\sqrt{3}} = -1.645$$

を解いて $c \approx 0.2131$ である。

94. 前問の棄却域に従って仮説を検定した結果をのべよ。

答え:実際の T_n の実現値は $(23+8+14)/373 \approx 0.1206$ なので仮説は棄却される。

95. 有意水準 1% での T_n の棄却域を述べよ。答えを導いた過程を詳しく書くこと。

答え：数表を見ると $P_\theta(S_n \leq -2.32) \approx 0.01$ である。したがって

$$\frac{4\sqrt{n}(c-0.25)}{\sqrt{3}} = -2.32$$

を解いて $c \approx 0.1980$ である。

96. 前問の棄却域に従って仮説を検定した結果をのべよ。

答え:実際の T_n の実現値は $(23+8+14)/373 \approx 0.1206$ なので仮説は棄却される。

97. 式 (1) で定義される確率変数 S_n が期待値 0 分散 1 の正規分布に従う理由を述べよ。

答え：中心極限をそのまま当てはめるだけでわかる。

98. 式 (1) で定義される確率変数 S_n について、n が大きいときに n が変化しても「$|S_n| \geq$ 定数」が成立する確率はほとんど変化しない理由を述べよ。
答え：n が大きいとき S_n は既におおよそ正規分布にしたがっていて、n が変化しても S_n の分布があまり変わらないから。

区間推定

以前紹介した推定は点推定と呼ばれるもので、母数 θ で特徴付けられる確率分布 P_θ に従う確率変数 X_i の実現値 (標本と呼ぶ) $x_1, \ldots, x_n$ を用いて、母数 θ をただ一つの値として推定するものであった。
それに対して今日紹介する区間推定は θ を含む確率が $1-\alpha$ 以上になるような区間の上限と下限を $x_1, \ldots, x_n$ の関数 ℓ, u として求める。ここで確率はどのような θ に対しても

$$P_\theta(\ell \leq \theta \leq u) \geq 1-\alpha \tag{1}$$

を満たすように定める。上記の式で θ を定数とみなし ℓ, u を確率変数とみなして確率を考えていることに注意する。区間 $[\ell, u]$ を信頼区間とよび $1-\alpha$ を信頼係数と呼ぶ。
区間推定はこれから説明するように両側検定の採択域を用いて行われる。

両側検定と区間推定

仮説検定において、n 個の標本 $x_1, \ldots, x_n$ が与えられているときにそれらを直接用いて検定を行わずに n 個の標本をうまく要約する統計量 (例えば $(x_1 + \cdots + x_n)/n$ など) を用いて検定を行うことが多い。この統計量を T_n で表わし、以後 T_n だけを用いて仮説を棄却するかどうか検定する場合のみを考える。

母数 θ で特徴付けられる確率分布 P_θ の母数が θ に等しいかどうかの有意水準 α の両側検定は、仮説を採択する T_n の範囲 $A(\theta) \subset \mathbf{R}$ を定めることによって行う。仮説を採択するかどうかは統計量 T_n が集合 $A(\theta)$ に所属するかどうかで判定する。

有意水準 α の仮説検定を行うために

$$P_\theta(T_n \in A(\theta)) = 1 - \alpha$$

となるように集合 $A(\theta)$ を定める。当然集合 $A(\theta)$ は θ に依存して変化する。

すべての θ について $A(\theta)$ の定め方が決まったとすると、逆に統計量 T_n の実現値 t_n に対して θ の区間推定値を

$$\{\theta \in \mathbf{R} \mid t_n \in A(\theta)\}$$

と定めればよいことがわかる。上の集合は必ずしも連続した実数の区間にならないが、特にすべての θ につ

いて $A(\theta) = [\beta(\theta), \gamma(\theta)]$ と表わすことができて $\beta(\theta)$ と $\gamma(\theta)$ の両方が単調増加関数であるときに

$$\{\theta \in \mathbf{R} \mid t_n \in A(\theta)\} = [\gamma^{-1}(t_n), \beta^{-1}(t_n)] \qquad (2)$$

のように推定の区間を仮説検定の採択域の端を表わす関数の逆関数として得られる。

画鋲の例 (教科書230ページ)

画鋲が上を向く確率 p を区間推定したい。画鋲を n 回投げ上を向いたかどうか観測し、確率変数 X_i を上を向いたときに1、そうでなければ0になる確率変数とする。また統計量 T_n を $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ と定義する。
まず、上を向く確率 p が q であるという仮説を検定するときの採択域 $A(q)$ を求める。統計量

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

を考え、仮説を採択する T_n の採択域を求めていく。採択域を $[q - c(q), q + c(q)]$ という区間に取ることにして q の関数 $c(q)$ を求める。中心極限定理を使って $c(q)$ を求めたいので、$E_q[X_1] = q$, $V_q[X_1] = q(1-q)$ に注意して

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt{n}(T_n - E_q[X_1])}{\sqrt{V_q[X_1]}} \\ &= \frac{\sqrt{n}(T_n - q)}{\sqrt{q(1-q)}} \end{aligned}$$

と定義すると n が大きいときは S_n はほぼ標準正規分布に従う。α の関数 Z_α を標準正規分布に従う確率

変数 N が $P(Z_\alpha < N) = \alpha$ を満たす実数として定義する。有意水準 $1-\alpha$ の両側検定を S_n に対して行うためには採択域を $[-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}]$ にすればよい。このことを同値変形すると

$$
\begin{aligned}
& -Z_{\alpha/2} \leq S_n \leq Z_{\alpha/2} \\
\Leftrightarrow \quad & |T_n - q| \leq \frac{\sqrt{q(1-q)}Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

を意味する。上の式は T_n と n を定めると未知変数が q だけになるので、上の式を満たす q の上限と下限を計算することができる（すっきりした式ではないが)。それが、母数 p の信頼区間になる。
なお、n が大きいときには弱大数の法則により T_n の値は q に近い。T_n を用いて式 (3) の右辺にある q だけを T_n で置き換えると教科書 230 ページの信頼区間 $[T_n - \frac{\sqrt{T_n(1-T_n)}Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, T_n + \frac{\sqrt{T_n(1-T_n)}Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}]$ を得る。

例題の解説

$[0, \theta]$ に値をとる連続一様分布の母数 θ を区間推定することを考える。この分布から n 個の標本 $X_1, \ldots, X_n$ が得られるとして、統計量 T_n を $\max\{X_1, \ldots,$

$X_n\}$ で定義する。T_n の累積分布関数は

$$P_\theta(T_n \le z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \le 0, \\ \frac{z^n}{\theta^n} & \text{if } 0 \le z \le \theta, \\ 1 & \text{if } \theta \le z \end{cases}$$

で与えられる。

1. 仮説 $\theta = b$ を有意水準 α で両側検定したい。T_n の採択域を b, α, n を用いて表わせ。

答え: 解答としては b, α, n の関数 $f(b, \alpha, n)$ および $g(b, \alpha, n)$ ですべての $0 < b$, $0 < \alpha < 1$, $1 \le n$ について

$$P_\theta(f(b, \alpha, n) \le T_n \le g(b, \alpha, n)) = 1 - \alpha$$

を満たす f と g を解答すれば正解とする。以下に一つの解答例を示す。

T_n が b より大きくなることは有り得ないので採択域の上限は b より大きくすることは無意味である。T_n の確率密度は b およびそれより少し小さい値で最大となり、採択域として T_n の確率密度が最大となる部分を含まないのはあまり適切ではないので、採択域の上限を b とする。

採択域の下限は $P_{\theta=b}(c \le T_n \le b) = 1 - \alpha$ となる c を用いるべきだが $P_{\theta=b}(c \le T_n \le b) = P_{\theta=b}(c \le T_n)$ なので $P_{\theta=b}(T_n \le c) = 1 - P_{\theta=b}(c \le T_n) = \alpha$ である。

T_n の累積分布関数より $c = b\sqrt[n]{\alpha}$ を得る。従って採択域は $[b\sqrt[n]{\alpha}, b]$ とするのが一つの正解である。

よくあった間違い 1 $P_{\theta=b}(|T_n - b| \leq c) = 1 - \alpha$ を満たす c を求めようとしている答案が多かった。T_n の分布が b を中心として左右対称であり、なおかつ区間 $[b-c, b+c]$ においてその他の区間よりも T_n の確率密度が大きい場合は採択域を $[b-c, b+c]$ にとることが妥当であるが、この問題ではどちらの条件も満たされないので採択域を $[b-c, b+c]$ という形に取る意味はまったくない。

よくあった間違い 2 T_n を標準化すると分散 1 期待値 0 の標準正規分布になると誤解して教科書末尾の数表を用いて採択域を設定している答案が多かったが、T_n は n を大きくしても正規分布にはならない。どのような場合に正規分布の近似を用いてよいのか、近似を使用できる条件を確認して欲しい。

2. 信頼係数 $1-\alpha$ で統計量 T_n を用いて母数 θ を区間推定したい。信頼区間を T_n, n, α を用いて表わせ。ヒント：信頼区間の導出には式 (2) をそのまま用いることができる。

答え：式 (2) をそのまま用いて $[T_n, T_n/\sqrt[n]{\alpha}]$。1 の解答が上記解答例と違う場合でも、1 の解答が正解でかつその正解を集合 $A(b, \alpha, n)$ と表わしたときに 2 の答

えが

$$\{b \in \mathbf{R} \mid T_n \in A(b, \alpha, n)\}$$

に等しければ正解。

3. 母数 θ が問 2 で解答した信頼区間に入っている確率を計算せよ。ここで θ はある値に固定されていて信頼区間がいろいろな値を確率的に動いていることに注意。

$\theta = b$ であるときに T_n より b が小さくなることは有り得ない。したがって

$$\begin{aligned}
& P_{\theta=b}(T_n \leq b \leq T_n/\sqrt[n]{\alpha}) \\
= \quad & P_{\theta=b}(b \leq T_n/\sqrt[n]{\alpha}) \\
= \quad & P_{\theta=b}(\sqrt[n]{\alpha}b \leq T_n) \\
= \quad & 1 - P_{\theta=b}(T_n \leq \sqrt[n]{\alpha}b) \\
= \quad & 1 - \alpha
\end{aligned}$$

を得る。2 で解答例と異なる解答をした場合でも上記確率を正しく計算していれば正解とする。

演習問題

原則として授業終了までに答案を提出して下さい。終らない場合は授業が行われた日の夜までに南３号館３１１号室前の箱に演習答案を提出して下さい。

$[\theta, 0]$ に値をとる連続一様分布の母数 θ を区間推定することを考える。この分布から n 個の標本 $X_1, \ldots, X_n$ が得られるとして、統計量 T_n を $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ で定義する。T_n の累積分布関数は

$$P_\theta(T_n \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \leq \theta, \\ 1 - (\frac{z}{\theta})^n & \text{if } \theta \leq z \leq 0, \\ 1 & \text{if } 0 \leq z \end{cases}$$

で与えられる。

101. 仮説 $\theta = b$ を有意水準 α で両側検定したい。T_n の採択域を b, α, n を用いて表わせ。

102. 信頼係数 $1 - \alpha$ で統計量 T_n を用いて母数 θ を区間推定したい。信頼区間を T_n, n, α を用いて表わせ。ヒント：信頼区間の導出には式 (2) をそのまま用いることができる。

103. 母数 θ が問 102 で解答した信頼区間に入っている確率を計算せよ。ここで θ はある値に固定されていて信頼区間がいろいろな値を確率的に動いていることに注意。

104. 授業でわかりにくかった所や要望を書いて下さい。また前回の答案および中間試験で×になったところで、理由がわからないところは申し出て下さい。