推定が身の周りで使われているところ

情報通信 (例えば電話局と家庭をつなぐ ADSL モデム) を行うときに、送信した情報はいろいろな原因によって変化して受信機に到達する。この信号の変化の仕方を条件付き確率として記述することができる。
一方、ADSL モデムの場合、電話局と家庭の距離や回線の状態によって、信号の変化の仕方が家庭ごとに異なっている。つまり信号の変化の仕方を記述する条件付き確率も異なる。ADSL モデムは、通信を開始する前に、信号の変化の仕方を記述する条件付き確率の推定を行っている。
ちなみに上記の例は ADSL モデムを地上波デジタルテレビ受信機などに置き換えても同じである。

2009-9-1

一様分布の推定の例題

・一様分布の母数の最尤推定は、確率密度関数の偏微分では求められない

・昨年の大学院院試で出題されている

θ を母数として $[0,\theta]$ に値をとる連続一様分布の最尤推定を考える。$f_\theta(x)$ をこの分布の確率密度関数とする。

1. $f_\theta(x)$ を図示せよ。積分して1になるか確認すること。(解答略)

2. この分布に従う3つの標本 x_1, x_2, x_3 を得たとする。x_1, x_2, x_3 を得る同時確率密度を θ, x_1, x_2, x_3 を用いて表わせ。

解答例: $i = 1,2,3$ のどれかについて $x_i < 0$ または $\theta < x_i$ ならば同時確率密度は0である。また、上記条件を満たさない場合の同時確率密度は $1/\theta^3$ である。したがって

$$f_\theta(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1/\theta^3 & \text{if } 0 \le \min\{x_1,x_2,x_3\} \\ & \text{かつ } \max\{x_1,x_2,x_3\} \le \theta \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

である。ここで「$0 \le \min\{x_1,x_2,x_3\}$ かつ $\max\{x_1, x_2, x_3\} \le \theta$」の条件をつけないと同時確率密度を x_1, x_2, x_3 について重積分したときに1を越えてしまい、

確率としておかしい。積分して1にならない関数を確率密度として解答しないこと。

73. x_1, x_2, x_3 を定数と見て θ を変数と見たときに直前の問題で答えた式を最大化する θ を x_1, x_2, x_3 を用いて表わせ。その式の x_i を X_i で置き換えた確率変数を T_3 とする。

解答例： $\theta < \max\{x_1, x_2, x_3\}$ の場合は確率密度が0になってしまう。$\max\{x_1, x_2, x_3\} \leq \theta$ のときの確率密度は $1/\theta^3$ であり、この値は θ を大きくするほど小さくなる。従って、答えは $\max\{x_1, x_2, x_3\}$ である。

74. T_3 は θ の推定量である。T_3 が不偏推定量であるか否か述べよ。

解答例: 不偏推定量ではない。

75. 直前の問に対する答えの証明を記述せよ。

解答例: $0 \leq z \leq \theta$ の範囲で

$$
\begin{aligned}
F_{T_3}(z) &= P_\theta(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq z) \\
&= P_\theta(X_1 \leq z, X_2 \leq z, X_3 \leq z) \\
&= P_\theta(X_1 \leq z) P_\theta(X_2 \leq z) P_\theta(X_3 \leq z) \\
&= (\frac{z}{\theta})^3
\end{aligned}
$$

これを z で微分すると $\frac{3z^2}{\theta^3}$ である。ここまで計算すれば T_3 の期待値が θ 未満になっていることは確率密度関数の形状からほぼ明らかであるが、一応期待値を計

算すると、

$$
\begin{aligned}
E_\theta[T_3] &= \int_{-\infty}^{\infty} z\frac{3z^2}{\theta^3}dz \\
&= \int_0^\theta \frac{3z^3}{\theta^3}dz \\
&= \left[\frac{3z^4}{4\theta^3}\right]_0^\theta \\
&= \frac{3}{4}\theta
\end{aligned}
$$

となり、不偏推定量ではない。

76. 標本が n 個あるときの θ の最尤推定量を $x_1, \ldots, x_n$ の式として表現し、最尤推定量が一致推定量であるか否か述べよ。

解答例: $T_n = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ で一致推定量である。

77. 直前の問で最尤推定量が一致推定量であるか否かの答えの証明を記述せよ。

解答例: 一致性を確認するためには

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|T_n - \theta| < \epsilon) \tag{1}$$

を $0 < \epsilon$ について計算する必要があるので、計算する。一方 $P_\theta(T_n \leq z) = z^n/\theta^n$ である。従って

$$P_\theta(|T_n - \theta| < \epsilon)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P_\theta(T_n \leq \theta - \epsilon \text{ or } T_n \geq \theta + \epsilon) \\
&= 1 - P_\theta(T_n \leq \theta - \epsilon) \\
&= 1 - \frac{(\theta - \epsilon)^n}{\theta^n} \to 1 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

であるから、式 (1) はすべての $\epsilon > 0$ とすべての $\theta > 0$ について 1 になるから、一致性が証明された。

演習問題

原則として授業終了までに答案を提出して下さい。終らない場合は授業が行われた日の夜までに南３号館３１１号室前の箱に演習答案を提出して下さい。

81. 添付の大学院入試問題の 2 の 2) の b) を解答せよ。導出過程を詳しく書くこと。

82. 問 81 で求めた推定量が不偏推定量であるか否か述べ、その証明を記述せよ。

83. 問 81 で求めた推定量が一致推定量であるか否か述べ、その証明を記述せよ。

84. 授業のわかりにくい点や要望・感想を書いて下さい。また前回の答案で×になったところで、理由がわからないところは申し出て下さい。

2009-9-9