前回演習問題の解説

34. U を 0 以上 2 以下のすべての値に一様に実現値を取る一様連続確率変数とする。累積分布関数 F_U と確率密度関数 f_U を図示せよ (式が無くてもよい)。

確率が一様なので、確率密度は 0 から 2 の間で一定になります。0 から 2 の間で一定にならない確率密度を解答した人は今度から気を付けて下さい。

$$f_U(u) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } 0 \leq u \leq 2, \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{if } u \leq 0 \\ 0.5u & \text{if } 0 \leq u \leq 2, \\ 1 & \text{if } 2 \leq u \end{cases}$$

35. U を前問と同じ確率変数とし、V を U と同じ分布を持ち U と統計的に独立な確率変数とする。同時累積分布関数 F_{UV} を求め、同時確率密度関数 f_{UV} が存在するか否か答えよ。(デルタ関数を知っている学生へ：この問では密度関数にデルタ関数を用いることはできないとする)

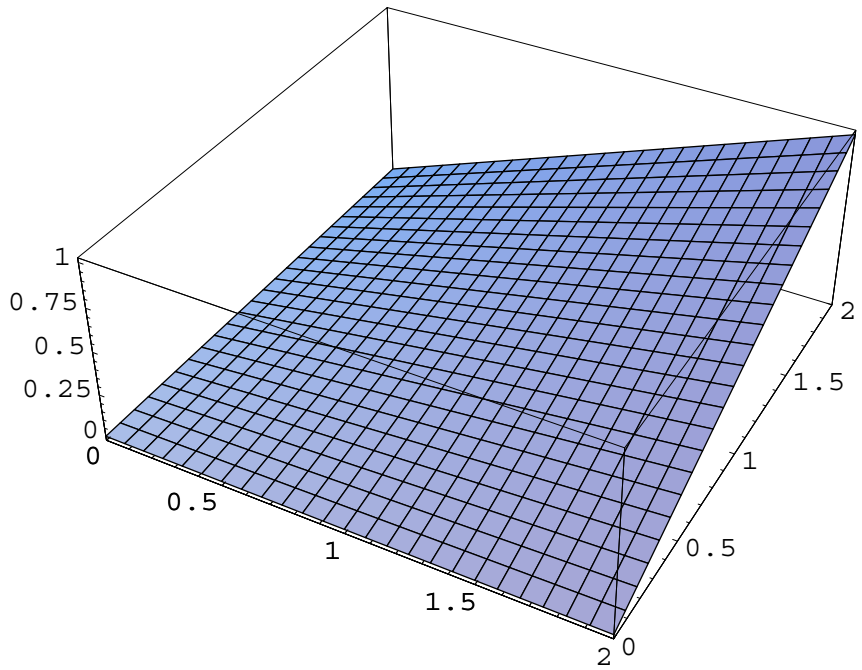
前回の講義内容より $F_{UV}(u,v) = F_U(u)F_V(v)$ である。

$$f_{UV}(u,v) = \begin{cases} 0.25 & \text{if } 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2, \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

とすると

$$F_{UV}(u,v) = \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{u} f_{UV}(u,v)dudv$$

を満たすから、同時確率密度関数は存在する。F_{UV} を以下に図示する。



36. U を前問と同じ確率変数とし、W を確率変数 U の実現値が u であるときに W の実現値も必ず u になる確率変数とする。同時累積分布関数 F_{UW} を求め、同時確率密度関数 f_{UW} が存在するか否か答えよ。(デルタ関数を知っている学生へ：この問では密度関数にデルタ関数を用いることはできないとする)

U と W は常に同じ値になるから、$F_U(u) = F_W(u)$ であり、$u \leq w$ なら $F_{UW}(u,w) = F_U(u)$、$u \geq w$ なら $F_{UW}(u,w) = F_U(w)$ である。従って

$$F_{UW}(u,w) = \begin{cases} 0 & \text{if } \min\{u,w\} \leq 0 \\ 0.5\min\{u,w\} & \text{if } 0 \leq \min\{u,w\} \leq 2, \\ 1 & \text{if } 2 \leq \min\{u,w\} \end{cases}$$

である。
U と W は常に同じ値を取るから、$a \neq b$ であるとき Δa と Δb を十分小さい正数とすると

$$\begin{aligned} & P(a < U \leq a + \Delta a, b < W \leq b + \Delta b) \\ = \ & F_{UW}(a + \Delta a, b + \Delta b) - F_{UW}(a,b) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

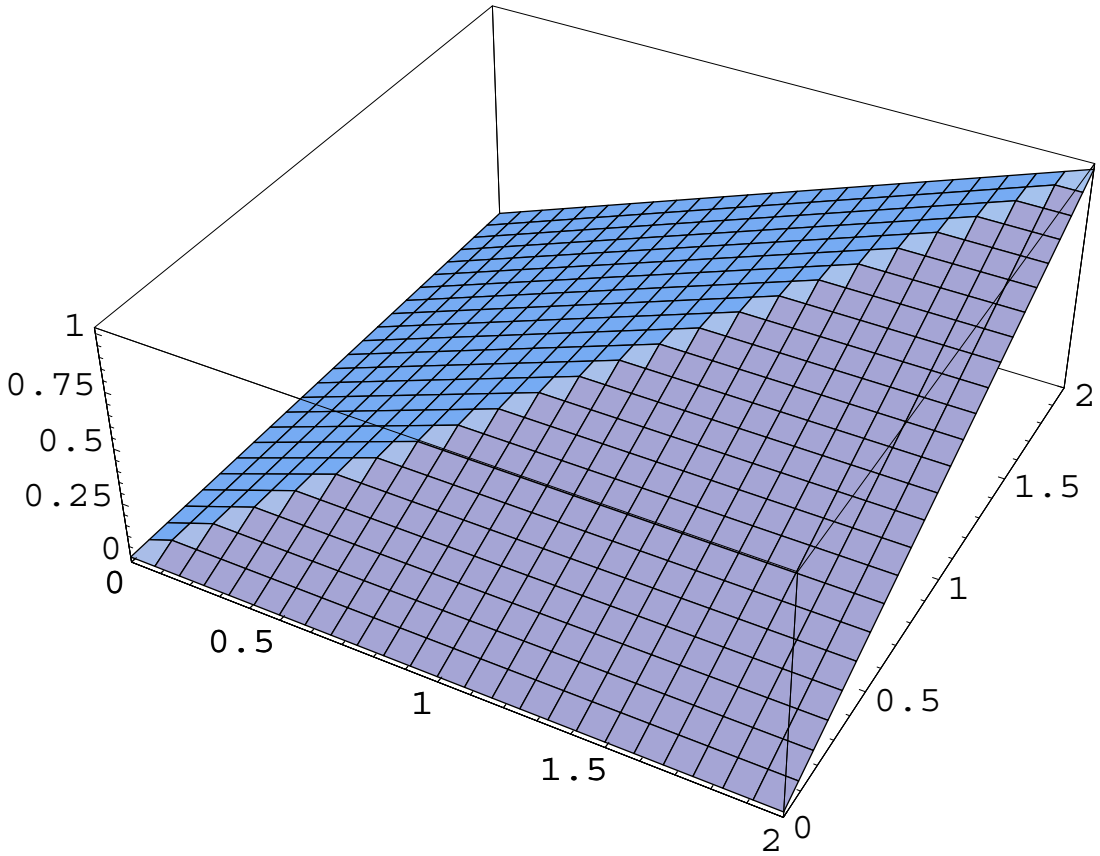
である。もし同時確率密度が存在するならば、Δa と Δb が十分小さいときに

$$P(a < U \leq a+\Delta a, b < W \leq b+\Delta b) \simeq f_{UW}(a,b)\Delta a \Delta b$$

なので $f_{UW}(a,b) = 0$ である。つまり $a \neq b$ ならば $f_{UW}(a,b) = 0$ である。このような同時確率密度関数 f_{UW} が存在したとしても

$$\int_{-\infty}^{w}\int_{-\infty}^{u} f_{UW}(u,w)dudw = 0$$

がすべての u, w について成立するため、f_{UW} は確率密度ではない。F_{UW} を以下に図示する。



- F_U, F_V, F_W はまったく同じ関数である。周辺確率が同じでも同時確率がまったく異なる確率変数の組が存在する。

- 同時確率密度を用いて確率を記述できない場合が存在する。

今日の内容：大数の法則 (教科書の8.1節)
画鋲が上を向く確率の決定

画鋲を投げて床に落ちたときに針が上を向いているときに「上を向く」と呼ぶことにする。画鋲の形状から、「上を向く確率」は 0.5 ではないことが予想される。上を向く確率を決定するためにはどのような手順を踏めばよいか ??

画鋲をたくさんの回数投げ (その回数を n とする)、上を向いた回数を数える (その回数を M_n とする)。n が十分大きいときには、 M_n/n が上を向く確率に近いと思われるがそれは本当か？ここで M_n は確率変数であることに注意。
特に M_n/n は n を大きくすると真の上を向く確率に「収束」するように思われるが、M_n/n は確率変数の列であり数列ではないから、「数列の収束」および「数列の極限値」という概念は使用できない。
確率変数の列の収束を考えるにはどうすればよいか？

2009-5-6

確率過程と確率収束

確率変数の列を**確率過程**と呼ぶ。

$X_1, X_2, \ldots$ を確率過程とする。X_i がある定数 ℓ に確率収束する (教科書 162 ページ) とは任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \ell| < \epsilon) = 1$$

が成立することを言う。$P(|X_n - \ell| < \epsilon)$ は普通の数列なので極限値を考えることができることに注意。

このことは X_n が ℓ から ϵ 以内の値を取る確率が n を大きくすると 1 に近づくことを示す。

2009-5-7

(弱) 大数の法則

確率過程 $X_1, X_2, \ldots,$ があるときに新しい確率過程を

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

と定義する。
仮定：すべての n について $X_1, \ldots, X_n$ が統計的に独立で同一の分布に従い、かつ $E[X_1]$ が有限の値で存在するならば (例えば $E[X_1] = +\infty$ などではない)

結論： Y_n は $E[X_1]$ に確率収束する。

強大数の法則もあるが、説明が難しいので取り上げない。

弱大数の法則の例

画鋲の例に戻る。画鋲を n 回投げる。確率変数 X_i を第 i 回目の画鋲投げで画鋲が上を向いたら 1, そうでなければ 0 とする。ここで

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は n 回の画鋲投げで上が出た割合をあらわす確率変数になる。一方

$$E[X_1] = P_{X_1}(1)$$

である。さらに $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は統計的に独立でありかつ同一の確率分布 P_{X_1} に従う。従って弱大数の法則を適用して Y_n が $P_{X_1}(1)$ に近い実現値を取る確率は n を大きくすると 1 に近づく。言い換えると、画鋲を投げる回数が大きくなると画鋲が実際に上を向いた割合が画鋲が上を向く確率に近い値になっている確率が 1 に近づく、ということを示している。

弱大数の法則の証明(1): チェビシェフの不等式 教科書105ページ

任意の確率変数 X を考える。X と期待値と分散が存在して m, σ^2 で与えられるとする。このとき

$$P(|X - m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

が成立する。
例：ある確率変数 X が期待値 3、分散 1 であるとする。$k = 2$ のとき上記の不等式は X が 1 以下または 5 以上の値をとる確率は 1/4 以下であることを示している。また $k = 3$ のとき上記の不等式は X が 0 以下または 6 以上の値を取る確率は 1/9 以下であることを示している。

2009-5-10

弱大数の法則の証明(2): 独立な確率変数の和の分散 教科書148ページ

X と Y が統計的に独立なときにには $V[X+Y] = V[X]+V[Y]$ であることを思い出して欲しい。
このとき X_1, X_2, X_3 が統計的に独立ならば

$$V[X_1+X_2+X_3] = V[X_1]+V[X_2]+V[X_3] \quad (1)$$

が成立する。
同様に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が統計的に独立であるときに

$$V[X_1+\cdots+X_n] = V[X_1]+\cdots+V[X_n]$$

が成立する。
さらに、すべての i について X_i の周辺確率分布が X_1 と等しい場合は

$$V[X_1+\cdots+X_n] = nV[X_1]$$

である。従って $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ ならば

$$V[Y_n] = \frac{V[X_1+\cdots+X_n]}{n^2} = \frac{V[X_1]}{n}$$

Y_n は独立かつ同一の分布に従う確率変数 X_i の実現値の平均であるが、その分散はもとの確率変数の分散よりも小さくなることを示している。

2009-5-11

弱大数の法則の証明(3)
教科書105ページ

$X_1,\ X_2,\ \ldots$ が同一かつ統計的に独立な確率分布に従うとし、その期待値と分散を $m,\ \sigma^2$ とする。$Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ とすると $E[Y_n] = m, V[Y_n] = \sigma^2/n$ である。チェビシェフの不等式を使うと

$$P(|Y_n - m| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \tag{2}$$

が成立する。ここで右辺は n を大きくすると 1 に収束するので左辺も 1 に収束する。
注意：上の証明は X_1 の分散が存在して有限でないと崩壊するが、大数の弱法則自体は分散が有限で存在していることを要求していない。分散が存在しない場合の証明はP. Billingsley,「Probability and Measure」, 第 3 版, John Wiley & Sons, 1995 を見よ。

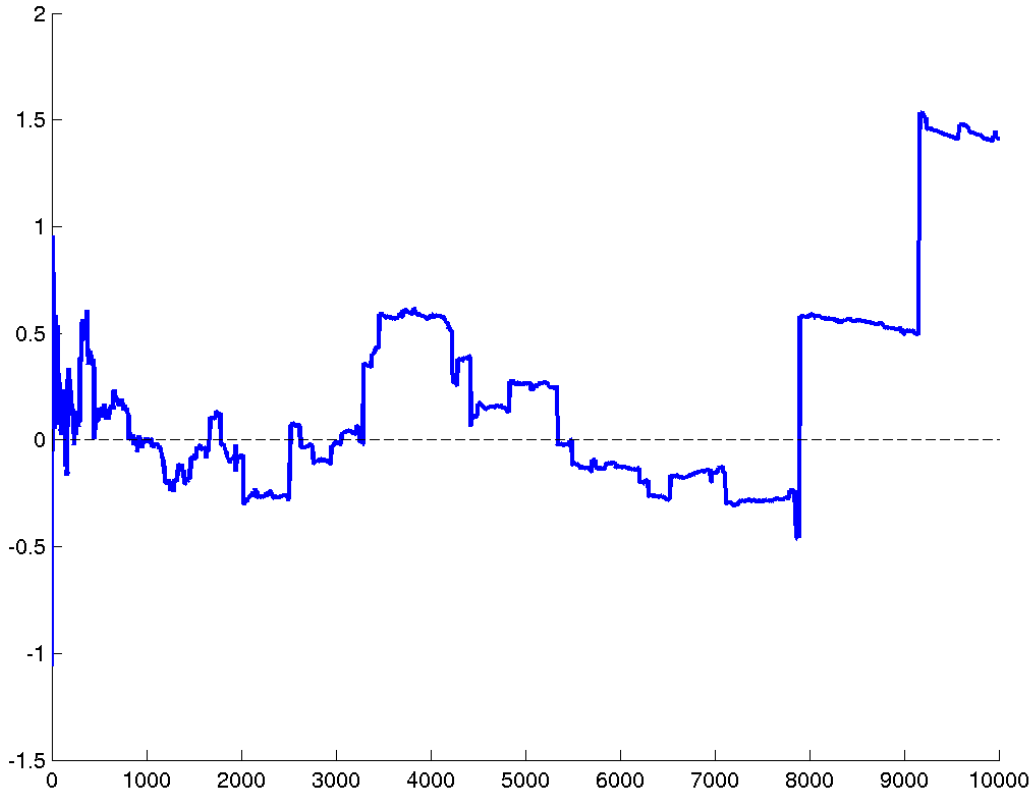
2009-5-12

弱大数の法則の図示

教科書 158 ページは $P_{X_1}(1) = 0.4$, $P_{X_1}(0) = 0.6$ となる同一かつ独立な分布に従う $X_1, X_2, \ldots$ について $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ を考え $y_1, y_2, \ldots, y_{20000}$ の実現値の描画することを 4 回繰り返した図である。これをみると n が大きくなるにつれてどの実験も y_n が 0.4 に近づいていることがわかる。

一方 X_1 が期待値を持たないコーシー分布 (確率密度関数は $1/\pi(1+x^2)$) に従うときに同じ操作を行うと以下のようになる（杉山准教授の授業資料より借用）。コーシー分布が期待値を持たないことは第 2 回講義で説明した。

2009-5-13



このことから期待値が存在しない場合には大数の弱法則はまったく成立しないことがわかる。このことから定理が成立する仮定をきちんと理解することが重要で、そうしないと定理が使えない状況で使用する間違いを犯すことがわかる。

演習問題

41. 1,2,3,4 の 4 つの面が等しい確率で出る 4 面サイコロを複数回振り i 回目に出た目を確率変数 X_i で表わす。$Y_i = (X_1 + \cdots + X_i)/i$ とする。このとき $V[Y_1]$ と $V[Y_2]$ を計算し $V[Y_1] > V[Y_2]$ であることを確認せよ。

42. 上の問題の状況で $i = 1, 2$ について $P(|Y_i - E[Y_i]| \geq 2)$ をチェビシェフの不等式を用いて評価せよ (ある値以下であることを示せばよい、平方根を残した解答で構わない)。

43. 式 (2) でどのようにチェビシェフの不等式を使用したか説明せよ。

44. 1,2,3,4 の 4 つの面が等しい確率で出る 4 面サイコロを考える。サイコロをたくさんの回数振ったときに、2 または 4 の目が出る頻度が 1/2 に近いことを大数の法則を用いて説明せよ。特に確率変数 X_i として何を選んだか明示すること。

45. 式 (1) を証明せよ。ただし X_1, X_2, X_3 が統計的に独立である条件を証明のどこでどのように使用したかわかるように解答すること。

46. 授業のわかりにくい点や要望・感想を書いて下さい。