

確率と統計 (E) 授業予定

以下のような順番で講義する予定

1. 確率論の基礎
2. 確率変数
3. 確率分布
4. 積率
5. 積率母関数
6. 離散型の確率分布の例
7. 連続型の確率分布の例
8. 確率不等式
9. 確率過程
10. 多次元の確率分布
11. 大数の法則
12. 中心極限定理
13. 統計的推定
14. 仮説検定

授業関連情報

担当教員 松本 隆太郎 (集積システム専攻)

居室 南3号館 3階 311号室

Email: ryutaroh@it.ss.titech.ac.jp

毎回授業の最後の演習の時間に当てます

成績は中間試験と期末試験と演習を総合評価して決めます

教科書：統計学入門 東京大学出版会 (教科書にある程度準拠して授業します)

参考書：自然科学の統計学、現代数理統計学 (これは名著)

今日の内容：確率論の基礎

(教科書の4章)

確率で用いる用語の定義

標本点:何かの現象の結果。 ω で表わす

標本空間:標本点すべてからなる集合。 Ω で表わす

例：

赤玉と黄玉が1つずつ入っているつぼを考える。つぼから玉を取り出して戻す操作を2回繰り返すと、取り出した玉の系列は

(赤, 赤)

(赤, 黄)

(黄, 赤)

(黄, 黄)

の4種類が有り得る。ここで(赤, 黄)などは標本点であり、標本空間は

$$\Omega = \{(\text{赤}, \text{赤}), (\text{赤}, \text{黄}), (\text{黄}, \text{赤}), (\text{黄}, \text{黄})\}$$

である。ここで $\{$ と $\}$ は集合を表わす中括弧である。

確率で用いる用語の定義 2

事象：標本空間の部分集合 (空集合や全体集合でも可)

例：前ページの例では 2 回目に赤玉を引くという事象は

$$\{(\text{赤}, \text{赤}), (\text{黄}, \text{赤})\}$$

という Ω の部分集合に対応する。

空事象：空集合で表わされる事象

根元 (ねもとではなくてこんげん) 事象：要素数が 1 である部分集合で表わされる事象

複合事象：要素数が 2 以上である部分集合で表わされる事象

例：前ページの例では 2 回目に赤玉を引くという事象は複合事象であるが、根元事象ではない。

事象 A と事象 B の和事象：和集合 $A \cup B$ で表わされる事象

事象 A と事象 B の積事象：積集合 $A \cap B$ で表わされる事象

確率で用いる用語の定義 2

$A \cap B = \emptyset$ であるときに事象 A と事象 B は排反事象であると言う。 $A \cap B = \emptyset$ は事象 A と事象 B が同時に起こらないことを表わす。

例: 2 回目に赤玉を引くという事象を

$$A = \{(\text{赤}, \text{赤}), (\text{黄}, \text{赤})\}$$

と定義し、2 回目に黄玉を引くという事象を

$$B = \{(\text{赤}, \text{黄}), (\text{黄}, \text{黄})\}$$

と定義する。このとき $A \cap B = \emptyset$ であり、 A と B は排反事象である。また、事象 A と B が同時に起こらないことは明らか。

事象 A に対して A の補集合 $\bar{A}$ で表わされる事象を補事象と呼ぶ。 $\bar{A}$ は A で表わされる事象が起こっていないことに対応する。

例: このページの例で $\bar{A} = B$ である。

「確率」の定義

巾集合の復習：集合 S に対し巾集合 2^S は S の部分集合すべてからなる集合である。

例: $S = \{a, b\}$ のとき

$$2^S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

である。 a と $\{a\}$ は別のものであることに注意。

標本空間 Ω 上の確率 P とは Ω の部分集合を引数に取る実数値関数で以下の条件を満たすものである。特に、 P の定義域は 2^Ω である。

1. 事象 A_i にたいし $0 \leq P(A_i) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$
3. 互いに排反な事象 A_i (つまり $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$) について

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

このように天下一的に定義した確率 P が現実的な意味や解釈を持つとは限らない。

「確率」の例

赤玉と黄玉の例で、赤玉を取り出すことと黄玉を取り出すことが同程度に確からしく起きるとすると、

$$P(\{(赤, 赤), (赤, 黄), (黄, 赤), (黄, 黄)\}) = 1$$

$$P(\{(赤, 黄), (黄, 赤), (黄, 黄)\}) = 0.75$$

$$P(\{(赤, 赤), (黄, 赤), (黄, 黄)\}) = 0.75$$

$$P(\{(赤, 赤), (赤, 黄), (黄, 黄)\}) = 0.75$$

$$P(\{(赤, 赤), (赤, 黄), (黄, 赤)\}) = 0.75$$

$$P(\{(黄, 赤), (黄, 黄)\}) = 0.5$$

$$P(\{(赤, 赤), (黄, 黄)\}) = 0.5$$

$$P(\{(赤, 赤), (赤, 黄)\}) = 0.5$$

$$P(\{(赤, 赤), (黄, 赤)\}) = 0.5$$

$$P(\{(赤, 黄), (黄, 黄)\}) = 0.5$$

$$P(\{(黄, 赤), (黄, 黄)\}) = 0.5$$

$$P(\{(赤, 赤)\}) = 0.25$$

$$P(\{(赤, 黄)\}) = 0.25$$

$$P(\{(黄, 赤)\}) = 0.25$$

$$P(\{(黄, 黄)\}) = 0.25$$

$$P(\emptyset) = 0$$

という確率が、実際に事象が起こる頻度に対応している。

「確率」の性質

前のページで述べた確率の定義の論理的な帰結として、確率が以下の性質を持つことがわかる。

$$P(\emptyset) = 0$$

証明: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ かつ $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ なので、性質3より

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

である。ここで性質2 $P(\Omega) = 1$ を代入すると $P(\emptyset) = 0$ を得る。

このことから「 $P(\emptyset) = 0$ 」を確率が満たすべき性質に含める必要が無いことがわかる。

似たような手順で、任意の事象 A と B について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成立することを、確率の3つの定義だけを用いて証明することができる。

条件付き確率

事象 B が起きたという条件のもとで事象 A が起きる
起こりやすさを考えたい。ここで $P(B) > 0$ を仮定
する。事象 B が起きたという条件のもとで事象 A が
起きる事象は $A \cap B$ である。従っていま考えている
起こりやすさは

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で表わされると考えられる。 $P(A \cap B)/P(B)$ を B を
条件とする A の条件付き確率と呼び、 $P(A|B)$ で表
わす。

例: 2 回目に赤玉を引くという事象を

$$C = \{(\text{赤}, \text{赤}), (\text{黄}, \text{赤})\}$$

と定義し、1 回目に赤玉を引くという事象を

$$D = \{(\text{赤}, \text{黄}), (\text{赤}, \text{赤})\}$$

と定義する。このとき

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

である。

事象の独立性

事象 A と B について

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

が成立するときに、 A と B は独立であると言う。上の式が成り立つときに両辺を $P(B)$ で割ると

$$P(A|B) = P(A)$$

が成り立つので、 A と B が独立であるとき、 A が起きる確率は B が起きたかどうかに関係が無い。

例：前のページの例で

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= 0.25, \\ P(C) = P(D) &= 0.5. \end{aligned}$$

なので、 C と D は独立である。特に、2 回目に赤玉を取り出す確率は 1 回目に赤玉を取り出したかどうかに関係が無い。

演習問題

毎回演習を行うので、解答を記入する A4 の紙を持参して下さい。

氏名、学籍番号、所属学科を明記して下さい。

原則として授業終了までに答案を提出して下さい。終らない場合は授業が行われた日の夜までに南 3 号館 3 1 1 号室前の箱に演習答案を提出して下さい。

1. 黒玉と白玉が 1 つずつ入っているつぼを考える。つぼから玉を取り出す操作を 2 回繰り返す。玉を取り出したあとに玉をつぼに**戻さない**。このときつぼから取り出される玉の系列の確率を考えたい。1 回目に玉を取り出すときに白玉を取り出すことと黒玉を取り出すことは同様に確からしいとする。この状況で標本空間 Ω として妥当だと思えるものを Ω の要素をすべて列挙する形式で記述せよ。集合の中括弧 $\{\}$ を正しく用いて解答しないと減点することがある。(ヒント：起こり得ない系列は標本空間に含めないほうが、後で答えを書くのが楽になる)

2. この状況で妥当だと思える確率 P を Ω のすべての部分集合 (Ω 自身と空集合を含む) に対する P の値を明示することによって書け。

3. 事象 A を 1 回目に黒玉を取り出す事象、 B を 2 回目に黒玉を取り出す事象とする。このとき事象 A と

B を集合 A と B の要素を列挙する形式で記述せよ。
集合の中括弧 $\{ \}$ を正しく用いて解答しないと減点することがある。

4. $P(A)$ と $P(B)$ を問 2 で定義した P に従って求めよ。

5. 条件付き確率 $P(A|B)$ を問 2 で定義した P に従って求めよ。

6. 事象 A と B は独立か否か理由とともに述べよ。

7. 事象 A と B は排反事象か否か理由とともに述べよ。

8. 条件付き確率 $P(A|\bar{B})$ を問 2 で定義した P に従って求めよ。ただし $\bar{B}$ は B の補事象。

9. 授業でわかりにくかった所や要望を書いて下さい