4. 境界条件*1

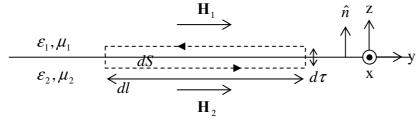
*1 L. Lorenz: Pogg. Ann. 81, 243-263 (1867); H. Helmholtz: Crelle's Journal, 72, 57-129 (1870)

4.1 表面電流がない場合

表面に厚さが零の面電流が存在する場合は除く

<電磁界の接線成分の連続性>

2 つの媒質の境界面 (x-y 面) での電磁界の関係を調べる。 y-z 面内に、幅 $d\tau$ の細い長方形に沿ってアンペアの法則を適用。 変位電流は有限で、面積とともに無視できる。



$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S} j\omega \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$
 境界面を考える
$$(\mathbf{H}_{2} - \mathbf{H}_{1}) \cdot d\mathbf{l} = j\omega D_{s} d\tau dl$$

 $d\tau \rightarrow 0$

 $(D_s$ は有限だが、 $d\tau \rightarrow 0$ となる)

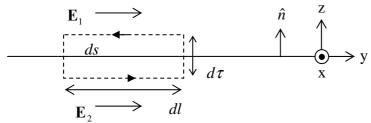
$$H_{2v} - H_{1v} = 0$$

同じことをx-z面でも繰り返すとベクトルの関係式が得られる。

$$H_{2x} - H_{1x} = 0$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad \begin{bmatrix} A_m \end{bmatrix}$$

次にファラデーの法則を適用する。



磁束密度は有限であるとすると、 $d\tau \rightarrow 0$ の極限で以下を得る。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(E_2 - E_1)dl = -j\omega B_s d\tau dl \rightarrow 0 \qquad \hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

 \mathcal{E}_1, μ_1

<電磁界の法線成分の連続性>

境界面の上面と下面で微小面積を考え、電磁界の接線成分の周回積分を行う。ベクトルの回転の定義より、以下の関係式を得る。

アンペアの法則

回転の定義

 $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} = j \omega \mathbf{D} \cdot \hat{n}$

上下の C_1, C_2 に上の式を適用し、辺々足すと

$$\frac{1}{\Delta s} \oint_{C_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{\Delta s} \oint_{C_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = j\omega \mathbf{D}_1 \cdot \hat{n} + j\omega \mathbf{D}_2 \cdot \hat{n}'$$

$$d\tau \to 0 \quad \angle \mathbf{J} \mathbf{S}_{\circ}$$

$$C_1 = -C_2 = C \, \angle \mathbf{S} \mathcal{D}_{\circ}, \quad \hat{n}' = -\hat{n} \, \text{ たから}$$

$$\frac{1}{\Delta s} \oint_C (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{l} = \hat{n} \cdot j\omega (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$$

(Hの接線成分が等しいならばDの法線成分も等しい)

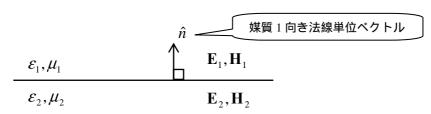
同様に

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$
 なら $\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$

すなわち、電束密度と磁束密度は境界の法線成分が連続となる。逆に、D,Bの法線成分が連続なら、E,Hの接線成分が連続となる。

境界条件のまとめ(表面電流がない場合)

マクスウェルの方程式と次のように対応させて $(\partial/\partial t \to 0, \nabla \to \hat{n})$ 覚えると覚えやすい。



マクスウェルの方程式 境界条件
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$



4.2 表面電流がある場合

(5章の損失性媒質[良導体]への入射を学習してから読むとわかりやすい)

< 完全導体の定義 >

ない。

静電磁気では、

- *完全導体(電気壁, Perfect Electric Conductor, PEC)とは、表面で電位が一定で内部で電界が零。したがって、電界は境界に垂直。
- ***完全磁性体(磁気壁**, Perfect Magnetic Conductor, PMC)とは、表面で磁位が一定で内 部で磁界が零。したがって、磁界は境界に垂直。

また、電界と磁界は無関係で独立であった。

時間変化のある電磁界では、Maxwell の方程式において誘電率 ε (あるいは導電率 σ)が無限である(完全導体)として、以下のような条件となる。

一方完全磁性体では逆に μ が無限大と考え、内部では電界も磁界も零となるが、表面に磁流が流れると考える。

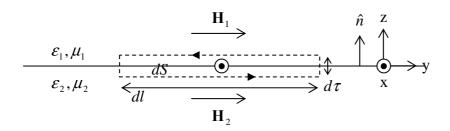
完全導体表面では磁界の接線成分と電界の法線成分は一般には 0 とはなら

<電磁界の接線成分の連続性>

2つの媒質の境界面 (x-y面)での電磁界の関係を調べる。

y-z 面内に、幅 $d\tau$ の細い長方形に沿ってアンペアの法則を適用。境界面における面電流密度を $j_s(A/m)$ とする。電流密度 $i(A/m^2)$ の薄い極限と考える。

変位電流は有限で、面積とともに無視できる。



$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S} (\mathbf{i} + j\omega \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} \qquad i \left[\frac{A}{m^{2}} \right]$$

$$(\mathbf{H}_{2} - \mathbf{H}_{1}) \cdot d\mathbf{l} = i_{x} d\tau dl + j\omega D_{s} d\tau dl$$

$$d\tau \to 0 \qquad i_{x} d\tau = j_{sx} \left[\frac{A}{m} \right]$$

 $(D_s$ は有限より、 $D_s d au o 0$ となる。 $i_x d au$ は有限となり、これが表面電流 j_{sx} である)

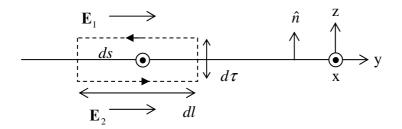
$$H_{2y} - H_{1y} = j_{sx}$$

同じことを x-z 面でも繰り返すとベクトルの関係式が得られる。

$$H_{2x} - H_{1x} = -j_{sy}$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s \quad \begin{bmatrix} A \\ m \end{bmatrix}$$

次にファラデーの法則を適用する。



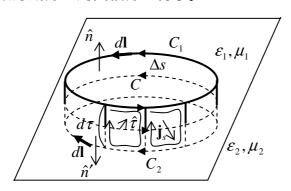
磁束密度は有限であるとすると、 $d\tau \rightarrow 0$ の極限で以下を得る。

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(E_{2} - E_{1})dl = -j\omega B_{s} d\tau dl \rightarrow 0 \qquad \hat{n} \times (\mathbf{E}_{1} - \mathbf{E}_{2}) = 0$$

<電磁界の法線成分の連続性>

もし表面電流j_sが存在するときには、再び境界面の上面と下面で微小面積を考え、電磁界の接線成分の周回積分を行う。



同様に、下記が成り立つ。

$$j\omega(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{n} = \frac{1}{\Delta s} \oint (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{I}$$

ここで、上下面の線積分を対で考え、側面の微小面積の周りの周回積分の和で代用するものとする。縦の積分路は隣接の線積分でキャンセルされる。側面の微小面積1つの周回積分に着目しアンペアの法則を適用する。 ĉ を側面から内向きの法線単位ベクトルとすると、境界の面電流密度 j, を用いてアンペアの法則を適用して次式を得る。

$$\frac{1}{\Delta s} \oint_{C} (\mathbf{H}_{1} - \mathbf{H}_{2}) \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \frac{1}{\Delta s} \sum \oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\Delta s} \sum \iint_{\mathbf{i}} \mathbf{i} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dS = \frac{1}{\Delta s} \oint_{S} \mathbf{j}_{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dl$$

$$\succeq \Xi \Xi \overline{C} \quad \nabla \cdot \mathbf{i} = -j\omega\rho \qquad \rho \begin{bmatrix} C \\ m^{3} \end{bmatrix}$$

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{i} dV = \iint_{S} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \iiint \rho dV = -j\omega\rho d\tau \Delta s$$

$$-\oint_{S} \mathbf{j}_{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dl = -j\omega\sigma \Delta s$$

$$= j\omega\sigma \qquad \qquad d\tau \qquad \Delta s$$

$$\emptyset \begin{bmatrix} C/m^{2} \end{bmatrix} \qquad \Delta s$$

$$\emptyset \begin{bmatrix} D/m^{2} \end{bmatrix} \qquad \Delta s$$

$$0 \begin{bmatrix} D/m^{2} \end{bmatrix} \qquad \Delta s \qquad dl$$

したがって、面電荷密度を σ [C/m 2]として、電磁気で知られたガウスの定理を得る。

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{n} = \sigma$$
 [C/m²]

境界条件のまとめ(表面電流がある場合)

マクスウェルの方程式と次のように対応させて $(\partial/\partial t \to 0, \nabla \to \hat{n})$ 覚えると覚えやすい。

