付録

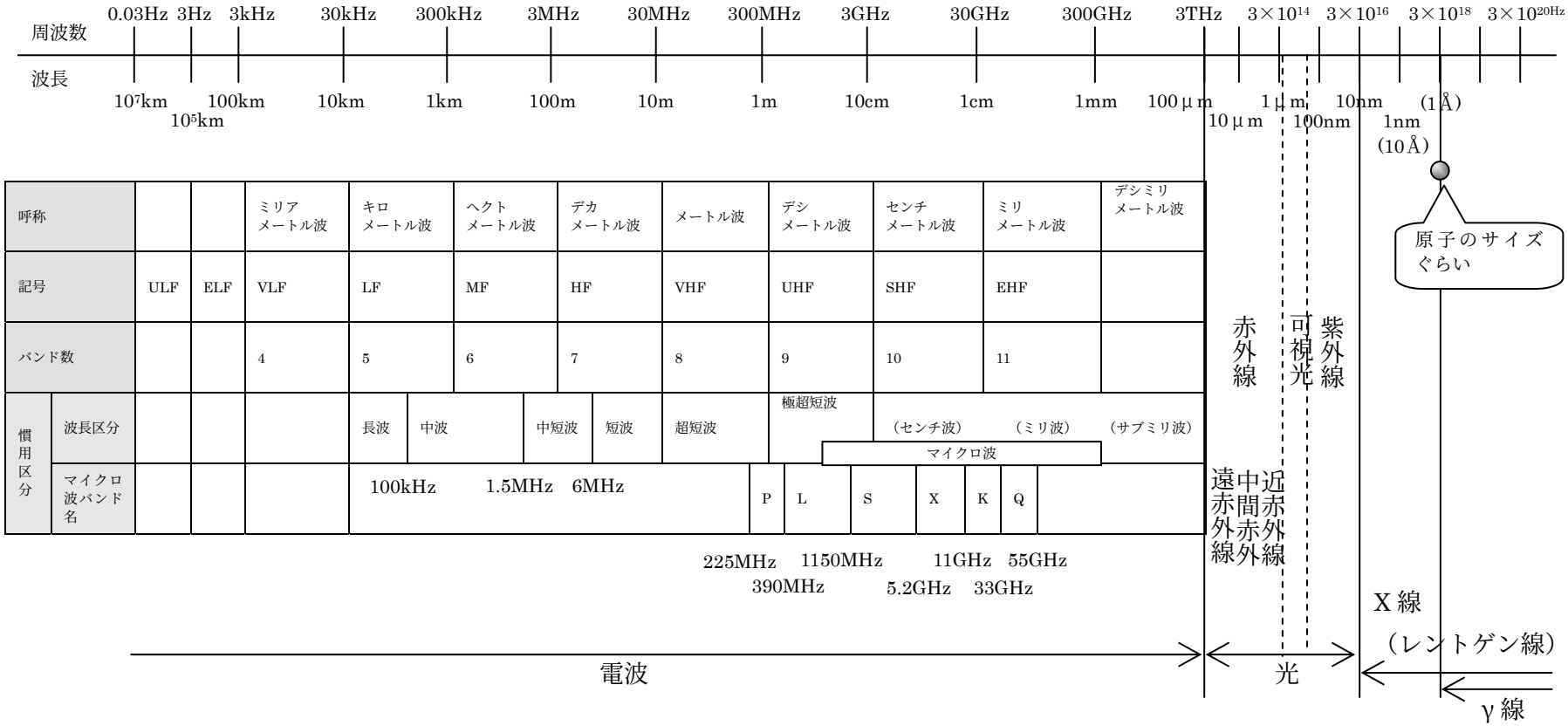
A.1 物理定数

[参考] 理科年表, 丸善, 2002

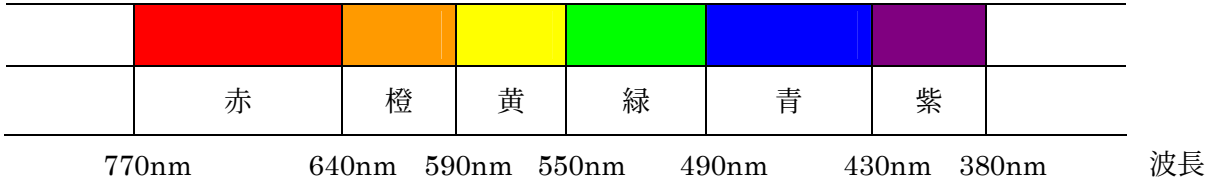
真空の誘電率(permittivity)	$\varepsilon_0 = (4\pi)^{-1} c^{-2} \times 10^{-7}$ $\cong 8.854187817\cdots \times 10^{-12} \quad [\mathrm{F}/m]$
真空の透磁率(permeability)	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \cong 1.2566370614\cdots \times 10^{-6} \quad [\mathrm{H}/m]$
真空の波動インピーダンス	$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 376.7 \cong 120\pi \quad [\Omega]$
真空中の光速	$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.99792458 \times 10^{8} \quad [m/s]$
素電荷	$e = 1.602176462 \times 10^{-19} \quad [C]$
電子の質量	$m_e = 9.10938188 \times 10^{-31} \quad [kg]$
陽子の質量	$m_p = 1.67262158 \times 10^{-27} \quad [kg]$
プランク定数	$h = 6.62606876 \times 10^{-34} \quad [J \cdot s]$ $\hbar = h/(2\pi) = 1.054571596 \times 10^{-34} \quad [J \cdot s]$
ボルツマン定数	$k = 1.3806503 \times 10^{-23} \cong 10^{-9}/(36\pi) \quad [J/\mathrm{K}]$
アボガドロ定数	$N_A = 6.02214199 \times 10^{23}$
万有引力定数	$G = 6.673 \times 10^{-11} \quad [N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}]$
地球の赤道半径(IAU 楕円体(1976))	6378.140 $[km]$
太陽質量	$M_S = 1.9891 \times 10^{30} \quad [kg]$
地球と太陽の質量比	$M_S / M_E = 332946.0$

A.2 電磁波スペクトルの分類と名称

A.2.1 スペクトル全体



A.2.2 可視光のスペクトル



A.2.3 マイクロ波バンド名

レーダー用の周波数の分類が目的で IEEE(http://standards.ieee.org)が IEEE Standard 521-1984 で定めた。

Band	Frequency
L	1-2GHz
S	2-4GHz
C	4-8GHz
X	8-12GHz
Ku	12-18GHz
K	18-27GHz
Ka	27-40GHz
V	40-75GHz
W	75-110GHz

A.3 補助単位

小さい			大きい		
記号	読み方	大きさ	記号	読み方	大きさ
m	ミリ	10^{-3}	k	キロ	10^{3}
μ	マイクロ	10^{-6}	M	メガ	10^{6}
n	ナノ	10^{-9}	G	ギガ	10^{9}
p	ピコ	10^{-12}	T	テラ	10^{12}
f	フェムト	10^{-15}	P	ペタ	10^{15}
a	アト	10^{-18}	E	エクサ	10^{18}

A.4 電気媒質定数

[参考] Ansoft HFSS Ver.8

<u>導体</u>

実際には導電率は温度によって変化する。
20℃の値を下の表に示す。

媒質名	比誘電率 ε_r	比透磁率 μ_r	導電率 σ $(\times 10^7)(S/m)$
アルミニウム	1	1.000021	3.80
真鍮	1	1	1.50
青銅	1	1	1.00
銅	1	0.999991	5.80
コバルト	1	250	1.00
クロム	1	1	0.76
金	1	0.99996	4.10
グラファイト	1	1	0.007
鉄	1	4000	1.03
鉛	1	0.999983	0.50
ニッケル	1	600	1.45
白金	1	1	0.93
銀	1	0.99998	6.10
はんだ	1	1	0.70
ステンレス	1	1	0.11
チタン	1	1.00018	0.21
タングステン	1	1	1.82
亜鉛	1	1	1.67
パラジウム	1	1.00082	0.93

誘電体

実際には誘電率は温度、周波数によって変化する。
また、誘電体の分極は電子分極、原子分極、配向分極、界面分極などの複数の分極によって構成されており、それらの分極が印加電界の周波数に追従できなくなり、急激に誘電率が変化する周波数がある。

媒質名	比誘電率 ε_r	比透磁率 μ_r	導電率 σ （S/m）
真空	1	1	0
空気	1.0006	1	0
テフロン	2.2	1	0
ダイアモンド	16.5	1	1.00×10^{-13}
ダイアモンド(高圧)	5.7	1	0
ガリウムヒ素	12.9	1	0
ガラス	5.5	1	1.00×10^{-12}
ゴム（硬い）	3	1	1.00×10^{-15}
サファイア	10	1	0
シリコン	11.9	1	0
石英ガラス(SiO_2)	4	1	0

その他

周波数によって、誘電体と導体のどちらの性質が支配的となるかが変わる。

媒質名	比誘電率 ε_r	比透磁率 μ_r	導電率 σ （S/m）
フェライト	12	1000	0.01
蒸留水	81	0.999991	0.0002
水（綺麗）	81	0.999991	0.01
海水	81	0.999991	4

A.5 三角関数の公式

A.5.1 加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

A.5.2 積⇔和公式

積→和公式

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}$$
$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b)-\sin(a-b)\}$$
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b)-\cos(a-b)\}$$

和→積公式

$$\sin a+\sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a-\sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a+\cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a-\cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

A.5.3 三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

A.6 フーリエ変換の公式

A.6.1 定義

(1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ (フーリエ変換)

(2) $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ (逆フーリエ変換)

フーリエ変換と逆フーリエ変換は対称性がある（式表現がほとんど同じ)、つまり、「$f(t)\Rightarrow F^{*}(\omega)/(2\pi)$」、「$F(\omega)\Rightarrow f^{*}(t)$」(上添字の*は複素共役)と交換すればフーリエ変換と逆フーリエ変換は逆転するので、以下の公式は「$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)/(2\pi)$」の交換で逆フーリエ変換の公式に読み替えることができる。

A.6.2 諸定理

(3) $\mathscr{F}[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,F(\omega)+b\,G(\omega)$ (線形性; 和の公式)

(4) $\mathscr{F}[f(t-\tau)]=e^{-j\omega\tau}\,F(\omega)$ (時間遅れ)

(5) $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$ (推移率; 変調)

(6) $\mathscr{F}[f(t/s)]=|s|F(s\omega)$ (伸縮率; 不確定性原理)

(7) $\mathscr{F}[\dfrac{d}{dt}f(t)]=j\omega F(\omega)$ (微分)

(8) $\mathscr{F}[\int^{t} f(\tau)d\tau]=\dfrac{F(\omega)}{j\omega}$ (積分)

(9) $\mathscr{F}[(f*g)(t)]=\mathscr{F}[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau]$
$=F(\omega)G(\omega)$ (畳み込み; convolution)

(10) $\mathscr{F}[f(t)g(t)]=\dfrac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$ (積の公式)

(11) $f(t)$: 周期Tの周期関数

$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$ (周期波形)

ただし、c_nは複素フーリエ係数

$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(jn\omega_0 t)$, $c_n=\dfrac{1}{T}\int_T f(t)\exp(-jn\omega_0 t)dt$ （$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$）

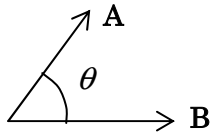
(12) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$ (パーセバルの等式)

(13) 「$f(t)$が実数 ⇔ $F(\omega)=F^{*}(-\omega)$」 (対称スペクトル)

A.6.3 代表的な関数のフーリエ変換

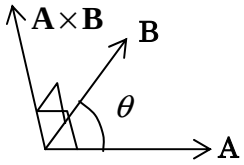
	$f(t)$	$F(\omega)$
ディラックのデルタ	$\delta(t)$	1
1	1	$2\pi\delta(\omega)$
面積 1 の矩形パルス	$\begin{cases} 1/\tau & (t \le \lvert\tau/2\rvert) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$\dfrac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \mathrm{sinc}(\omega\tau/2)$
ガウシアンパルス	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\omega + j\frac{\mu}{\sigma^2})^2}{2(1/\sigma)^2}}$ $= \sqrt{2\pi}(1/\sigma) e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \underline{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)} e^{-\frac{(\omega + j\frac{\mu}{\sigma^2})^2}{2(1/\sigma)^2}}}$

A.7 ベクトル公式



(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$ （θ: **A** と **B** の間の角）

(2) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\hat{u}_{AB}|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ （$\hat{u}_{AB}$: **A** から **B** の方に回転する右ねじの進む方向の単位ベクトル）



(3) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(4) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$

(5) $\hat{u}_A=\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ （**A** 方向の単位ベクトル）

(6) $\nabla=\hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$

(7) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$

(8) $\nabla\times(\nabla V)=0$

(9) $\nabla\cdot(V\mathbf{A})=V\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla V$

(10) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$

(11) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

ここで、 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\mathbf{B}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right)=\left(B_x\dfrac{\partial}{\partial x}+B_y\dfrac{\partial}{\partial y}+B_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A}$

(12) $\nabla\times(V\mathbf{A})=\nabla V\times\mathbf{A}+V\nabla\times\mathbf{A}$

(13) $\nabla(UV)=U\nabla V+V\nabla U$

(14) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$

(15)
$$\nabla\cdot(\nabla V)=\nabla^2 V$$
$$=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$
（ラプラシアン）

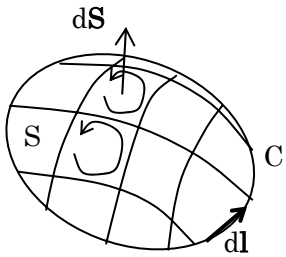
(16) $\nabla^2\mathbf{A}=-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$ （ベクトル・ラプラシアン）

カルテシアン座標のとき: $\nabla^2\mathbf{A}=\hat{x}\nabla^2 A_x+\hat{y}\nabla^2 A_y+\hat{z}\nabla^2 A_z$

(17)
$$\nabla V = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$= \hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$= \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

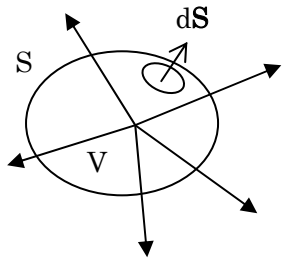
(18)
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

(19)
$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$



(20) $\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ (ストークスの定理)

(21) $\iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla V \, dS = \oint_C V d\mathbf{l}$



(22) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ (ガウスの発散定理)

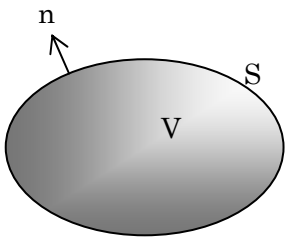
(23) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \oiint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} dS$ (3-D Stokes)

(24) $\iiint_V \nabla V dV = \oiint_S V d\mathbf{S}$

(25) Green の定理

Green の第一公式

$$\oiint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS = \iiint_V \left\{ f\nabla^2 g + (\nabla f)\cdot(\nabla g) \right\} dV$$



Green の第二公式

$$\oiint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V \left\{ f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \right\} dV$$

ここで、n は S の内部から外側に向かう S に垂直方向の座標である。

(26)ヘルムホルツの定理

任意のベクトル関数は１つのスカラー関数の勾配と、他の１つのベクトル関数の回転の和で表すことができる（直和分解できる）。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_p$$

$\mathbf{F}_r$ と $\mathbf{F}_p$ はベクトル関数 $\mathbf{A}$ とスカラー関数 ϕ を用いて次のように書ける。

$$\begin{cases} \mathbf{F}_r = \nabla\times\mathbf{A} & \text{(ソレノイダル・ベクトル)} \\ \mathbf{F}_p = \nabla\phi & \text{(ラメラー・ベクトル)} \end{cases}$$

$\nabla\cdot\mathbf{a} = 0$ であるようなベクトルをソレノイダルベクトルという。ソレノイダルとは無始無終を意味し、定常電流が作る磁界のように力線は閉曲線となる。$\nabla\times\mathbf{a} = 0$ であるようなベクトルをラメラーベクトルと言う。ラメラーとは層状を意味し、ラメラーベクトルの力線は層状となる。

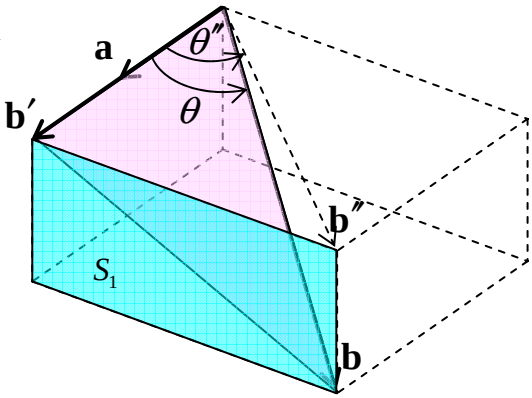
$\mathbf{F}_r$ と $\mathbf{F}_p$ は次の性質を持つ。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{F}_r = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \\ \nabla\times\mathbf{F}_p = \nabla\times(\nabla\phi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}_p \\ \nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}_r \end{cases}$$

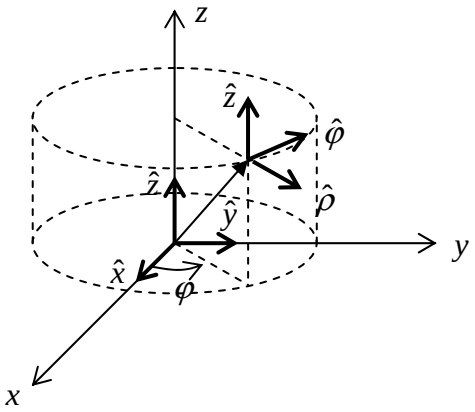
つまり、ベクトル関数 $\mathbf{F}$ を定めるときに、発散だけ、または回転だけを定めたのでは完全に定まらず、発散と回転の両方を定めなければ $\mathbf{F}$ は一意に定まらない。

A.8 座標、ベクトルの座標変換



$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}''$ の内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}''=|\mathbf{a}||\mathbf{b}''|\cos\theta''$ に等しい。なぜならば、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ において、$|\mathbf{b}|\cos\theta$ は $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}$ の方向への射影を表しており、図中に記入されているベクトル $\mathbf{b}'$ の大きさ $|\mathbf{b}'|$ に等しい。従って、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta=|\mathbf{a}||\mathbf{b}'|$。一方、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}$ に垂直な面 S_1 内で移動させたベクトル $\mathbf{b}''$ との内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}''=|\mathbf{a}||\mathbf{b}''|\cos\theta''$ においても $|\mathbf{b}''|\cos\theta''=|\mathbf{b}'|$ なので、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}''=|\mathbf{a}||\mathbf{b}''|\cos\theta''=|\mathbf{a}||\mathbf{b}'|$。よって、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}''$。この定理は A.7.2 の内積の計算で用いる。

A.8.1 直交座標 (x,y,z) ⇔ 円筒座標 (ρ,φ,z)



<u>座標の変換</u>

$(\rho,\varphi,z)\to(x,y,z)$:
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

$(x,y,z)\to(\rho,\varphi,z)$:
$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\tan^{-1}(y/x) \quad \text{(場合によって注意が必要)} \\ z=z \end{cases}$$

<u>ベクトルの変換</u>

$$\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{\rho}=\cos\varphi\\ \hat{x}\cdot\hat{\varphi}=-\sin\varphi\\ \hat{x}\cdot\hat{z}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{y}\cdot\hat{\rho}=\sin\varphi\\ \hat{y}\cdot\hat{\varphi}=\cos\varphi\\ \hat{y}\cdot\hat{z}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{z}\cdot\hat{\rho}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{\varphi}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{z}=1\end{cases}$$

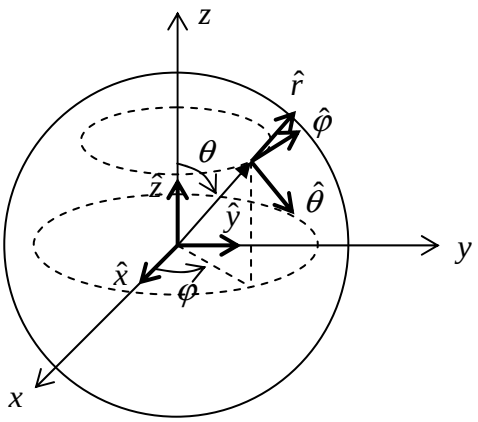
例えば直角座標で(x,y,z)、円筒座標で(ρ,φ,z)の位置に始点があるベクトル$\mathbf{A}$が直角座標表示$\mathbf{A}=\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z$されているとき、それを円筒座標表示するには

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\hat{\rho}(\hat{\rho}\cdot\mathbf{A})+\hat{\varphi}(\hat{\varphi}\cdot\mathbf{A})+\hat{z}(\hat{z}\cdot\mathbf{A})\\ &=\hat{\rho}\left\{\hat{\rho}\cdot(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)\right\}\\ &\quad+\hat{\varphi}\left\{\hat{\varphi}\cdot(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)\right\}\\ &\quad+\hat{z}\left\{\hat{z}\cdot(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)\right\}\\ &=\hat{\rho}\left\{(\hat{\rho}\cdot\hat{x})A_x+(\hat{\rho}\cdot\hat{y})A_y+(\hat{\rho}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\ &\quad+\hat{\varphi}\left\{(\hat{\varphi}\cdot\hat{x})A_x+(\hat{\varphi}\cdot\hat{y})A_y+(\hat{\varphi}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\ &\quad+\hat{z}\left\{(\hat{z}\cdot\hat{x})A_x+(\hat{z}\cdot\hat{y})A_y+(\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\end{aligned}$$

ここで、()内の単位ベクトルの内積は上で計算した式を使えばよい。
同様に、円筒座標から直角座標への座標変換もできる。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\hat{x}(\hat{x}\cdot\mathbf{A})+\hat{y}(\hat{y}\cdot\mathbf{A})+\hat{z}(\hat{z}\cdot\mathbf{A})\\ &=\hat{x}\left\{(\hat{x}\cdot\hat{\rho})A_\rho+(\hat{x}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi+(\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\ &\quad+\hat{y}\left\{(\hat{y}\cdot\hat{\rho})A_\rho+(\hat{y}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi+(\hat{y}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\ &\quad+\hat{z}\left\{(\hat{z}\cdot\hat{\rho})A_\rho+(\hat{z}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi+(\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\end{aligned}$$

A.8.2 直交座標(x,y,z) ⇔ 極座標(r,θ,φ)



<u>座標の変換</u>

$(r,\theta,\varphi)\to(x,y,z)$:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$(x,y,z)\to(r,\theta,\varphi)$:
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad \text{(場合によって注意が必要)} \end{cases}$$

<u>ベクトルの変換</u>

$$\begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\varphi} = -\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{y}\cdot\hat{r} = \sin\theta\sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\varphi} = \cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta \\ \hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta \\ \hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0 \end{cases}$$

後は円筒座標と同じように変換する。

A.8.3 ∇演算子の円筒座標系の表現を導く（例）

for ∇V

$$\nabla V = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

ここで、

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi \\ \hat{y} = \hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

また、**連鎖律(chain rule)**を使って(x,y,z)座標系での微分を(ρ,φ,z)座標系での微分で表す。

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\left(\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi}+0\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{x}{\rho}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\left(\frac{-y}{\rho^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$=\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\left(\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi}+0\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{y}{\rho}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\left(\frac{x}{\rho^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$=\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla V=\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial V}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=(\hat{\rho}\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)+(\hat{\rho}\sin\varphi+\hat{\varphi}\cos\varphi)\left(\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=(\hat{\rho}\cos\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)+(\hat{\rho}\sin\varphi)\left(\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$$

$$+(-\hat{\varphi}\sin\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)+(\hat{\varphi}\cos\varphi)\left(\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$$

$$+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=\hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$\nabla\cdot\mathbf{A},\nabla\times\mathbf{A}$ についても直交座標の定義に対して同様に地道に座標変換と連鎖律を使って変形すれば求めることができる。