8 電磁波における諸原理

8.1 ポインティング・ベクトル(Poynting Vector)*1 (エネルギー流)

*1: J.A. Poynting: Phil. Trans. Roy. Soc., 175, 343-361 (1884)

 $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$: ポインティング・ベクトル(Poynting Vector) \hat{n} $\mathbf{P} = \iint_S \mathbf{S} \cdot \hat{n} dS$: 面 S を通過する複素電力

Re[P]: 面 S を通過する電力Re[S]: 電力の進行方向

[説明]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}$$

$$\Delta \exists : \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{H}^*$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*$$

$$= \mathbf{H}^* \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot (-j\omega\varepsilon\mathbf{E}^* + \mathbf{J}^*)$$

$$= -j\omega\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*$$

対象
$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$
 $\cdot \hat{\mathbf{n}}' dS = -\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right) dV$

$$= \iiint_V j\omega \frac{\left(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right)}{2} dV + \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*}{2} dV$$

$$= 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{4} - \frac{\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} \right) dV + \iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV$$
磁気エネルギー 電気エネルギー $\mathbf{J} = \mathbf{J} =$

この各項の持つ意味を電気回路における複素電力の関係により類推する。

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$P = \frac{VI^*}{2} = \frac{RII^*}{2} + 2j\omega\left(\frac{LII^*}{4} - \frac{II^*}{4\omega^2 C}\right)$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

$$V = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I$$

これらの対応から $\iint_S rac{\mathbf{E} imes \mathbf{H}^*}{2} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS$ は V 内へ供給される複素電力であることが分かる。

類推: $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$ は単位面積当りの複素電力流を表す。(現在のところ明確な解答はない) 特にその実部は単位面積当り 1 秒間に通過するエネルギーと解釈されて用いられる

しかし、 $\iint_{S} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*}}{2} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS = -\iiint_{V} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*}}{2} \right) dV$ の右辺を意識して、任意のベク

トル \mathbf{a} を用いて $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \to \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} + \nabla \times \mathbf{a}$ としても付録 A.6 (7)より上の議論はそ

のまま成り立ち、 $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$ をエネルギー密度として解釈するときに $\nabla \times \mathbf{a}$ の分だけ自由度がある。このことから、ポインティング・ベクトルは「閉曲面で積分しなければ意味の無いベクトル」であるということを正しく理解しておく必要がある。ポインティング・ベクトル以外にも抜山ベクトル(抜山平一:電気学会誌, 45, 739-748 (1925))などが提案されている。

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \qquad \text{Poynting Vector } \left[Watt / m^2 \right]$$

$$\iiint_{V} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{*}}{2} dv \quad \leftrightarrow \quad \frac{RII^{*}}{2}$$
対応関係:
$$\iiint_{V} \frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{*}}{4} dv \quad \leftrightarrow \quad \frac{LII^{*}}{4}$$

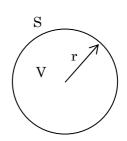
$$- \iiint_{V} \frac{\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{*}}{4} dv \quad \leftrightarrow \quad -\frac{II^{*}}{4\omega^{2}C}$$

Poynting Vector を用いた微小ダイポールからの放射エネルギーの計算例 遠方界近似せず厳密に計算した場合

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$$

半径rの球を考え、外向きのエネルギー流を積分する。

$$P = \text{Real} \left[\iint_{S} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*}}{2} \cdot d\mathbf{S} \right]$$



$$E_r = \frac{\eta(II)}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{ikr} \right) \cos\theta \cdot e^{-jkr}$$

$$E_{\phi} = 0$$

$$E_{\theta} = j \frac{\eta(Il)}{2\lambda r} \left(1 + \frac{1}{ikr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \theta \cdot e^{-jkr}$$

$$H_r = 0$$

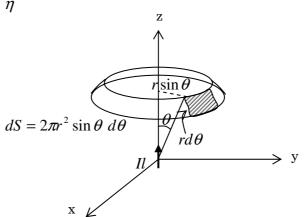
$$H_{\phi} = j \frac{(Il)}{2\lambda r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \sin \theta \cdot e^{-jkr}$$

$$H_{\theta} = 0$$

ここで、 $\eta = \sqrt{\mu/arepsilon}$ で自由空間では $120\pi[\Omega]$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot (\hat{r}r^2 \sin \theta d\phi d\theta)$$

被積分関数 =
$$\frac{1}{2}E_{\theta}\frac{H_{\phi}^{*}}{\sqrt[]{r^{2}\sin\theta}}$$
 $=\frac{1}{2}\left(\frac{Il}{2\lambda r}\right)^{2}\eta\sin^{2}\theta\left(1-\frac{1}{k^{2}r^{2}}+\frac{1}{jkr}\right)\left(1-\frac{1}{jkr}\right)\left(r^{2}\sin\theta\right)$ (遠方では $H_{\phi}=\frac{E_{\theta}}{\eta}$)



Real part は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Il}{2\lambda r} \right)^2 \eta \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{\underline{k^2 r^2}} + \frac{1}{\underline{k^2 r^2}} \right) (r^2 \sin \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{Il}{2\lambda r} \right)^2 \eta \sin^2 \theta (r^2 \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{Il}{2\lambda} \right)^2 \eta \sin^3 \theta$$

•
$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{Il}{2\lambda}\right)^2 \eta \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi$$

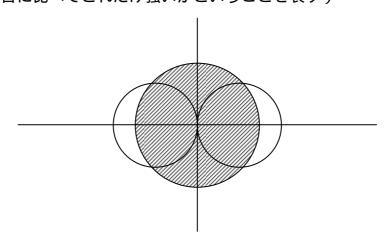
$$= \frac{1}{6} \left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \eta \cdot 2\pi = \frac{\eta(Il)^2}{3\lambda^2} \pi \quad \text{[watt]}$$
全放射電力

正面方向への輻射

•
$$\frac{E_{\theta}H_{\phi}^{*}}{2}dS\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \times 4\pi r^{2} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{ll}{2\lambda r}\right)^{2} \times 4\pi r^{2} = \frac{\eta(ll)^{2}}{2\lambda^{2}}\pi$$
 eirp 等価等方輻射電力

距離によらず (エネルギー保存則)

(無指向性の場合に比べてどれだけ強いかということを表す)



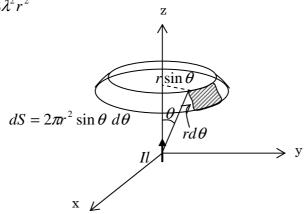
遠方では
$$H_{\phi}=rac{E_{ heta}}{\eta}$$
 より、 $\left|rac{\mathbf{E} imes\mathbf{H}^*}{2}
ight|=rac{\left|E_{ heta}
ight|^2}{2n}$ と同じ

最初から遠方界近似を用いた場合

微少ダイポール

$$\begin{split} \mathbf{E} &= E_{\theta} \hat{\theta} = \hat{\theta} j \frac{\eta \, Il}{2\lambda \, r} e^{-jkr} \sin \theta \\ \mathbf{H} &= H_{\phi} \hat{\phi} = \hat{\phi} \frac{E_{\theta}}{\eta} \end{split}$$
 遠方界近似

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \hat{r} \frac{\left| E_{\theta} \right|^2}{2\eta} = \frac{\eta I^2 l^2}{8\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta \ \hat{r}$$



$$\oint \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\eta \, I^2 l^2}{8\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \cdot 2\pi$$

$$= \frac{\pi}{4} \eta \frac{I^2 l^2}{\lambda^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta$$

$$\frac{4}{3}$$

$$= \frac{\eta \pi (Il)^2}{3\lambda^2} \quad [\text{watt}]$$
同じ結果

8.2 Uniqueness 定理*1

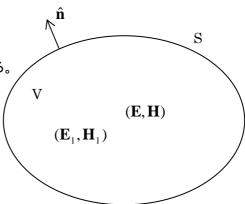
*1: A. Rubinowicz: Pysikalische Zeitschrift, 22, 707-711 (1926)

マクスウェルの方程式の境界値問題の解は一意に定まることを証明する。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}$$

V 内に Maxwell の方程式を満たす 2 組の電磁界分布 $(\mathbf{E},\mathbf{H}),(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)$ が存在すると仮定する。 $\sigma \neq 0$ を仮定する。



ベクトル公式: $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$ において、

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$$
 * 複素共役 $\mathbf{b} = (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1)^*$

とおく。

$$\nabla \cdot \left[\left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) \times \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right)^{*} \right] = \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right)^{*} \cdot \nabla \times \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) - \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) \cdot \nabla \times \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right)^{*}$$

$$= \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right)^{*} \cdot \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right) \left(-j\omega\mu \right) - \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) \cdot \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right)^{*} \left(j\omega\varepsilon \right)^{*}$$

$$- \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) \cdot \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right)^{*} \sigma$$

$$= -j\omega \left[\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right]^{2} \mu - \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right|^{2} \varepsilon \right] - \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right|^{2} \sigma$$

$$\iiint_{V} \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) \times \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right)^{*} \right] dV = \oiint_{S} \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right) \times \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right)^{*} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= -j\omega \iiint_{V} \left\{ \mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right|^{2} \mu - \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right|^{2} \varepsilon \right\} dV - \sigma \iiint_{V} \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right|^{2} dV$$

$$\iint_{S} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{1}) \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{1})^{*} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -j\omega \iiint_{V} \left\{ \mathbf{H} - \mathbf{H}_{1} \right|^{2} \mu - \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right|^{2} \varepsilon \right\} dV - \sigma \iiint_{V} \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}_{1} \right|^{2} dV$$

 $\sigma \neq 0$ とすると、左辺の面積分において、

 $\{(\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1)\} \cdot \hat{n} = \{(\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) \times \hat{n}\} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) = \{\hat{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1)\} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1)$ より、 $S \perp \mathbf{T} \mathbf{E} \times \hat{n} = \mathbf{E}_1 \times \hat{n} \quad \text{or} \quad \mathbf{H} \times \hat{n} = \mathbf{H}_1 \times \hat{n} \quad \text{ならば左辺は0}$

右辺の体積積分も0になるということは、V内の至る所で実部=0とならなければならないので $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ となる。また同様に虚部=0とならなければならないので、 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ となる ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ はすでに実部=0から得られているから)。つまり、右辺からは「V内の至る所で

 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ and $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ 」が言える。

この逆も成立し、まとめると次の関係が成立する。

「 $S \perp \mathbf{C} \mathbf{E} \times \hat{n} = \mathbf{E}_1 \times \hat{n}$ or $\mathbf{H} \times \hat{n} = \mathbf{H}_1 \times \hat{n}$ 」

「V内の至る所で $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ and $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ 」

実は、 $\sigma = 0$ の場合も含めて Uniqueness 定理は成立する。 このことは、異なる証明をする必要がある。(大学院の「電磁波特論」で説明)

解の一意性(Uniqueness)の重要性

微分方程式の境界値問題の解は1つしか存在しないという界(解)の一意性の定理は非常に重要である。まず、物理現象として1つの界分布しか許されないということを知ることに興味があり、重要である。また、計算上も非常に重要で、微分方程式を解くときは人為的な仮定をして解くことがある。そのようにして求まった界は、元の方程式に代入して確かに解であることを確認して納得することができるが、いつも「他の解は存在しなかったのだろうか?」という疑問が残ってしまう。そこで、「解の一意性(Uniqueness)」の定理があれば、たとえ他に方程式の解き方があったとしても、結局最終結果は同じになることがわかり、安心できるのである。