## 7．波源からの放射界

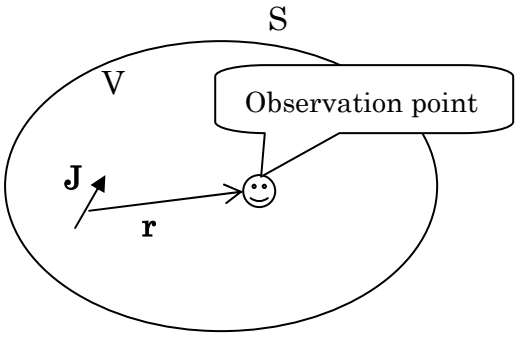
この章では、波源（電流）から放射される電磁界を計算する。前の章までは平面波を扱ったが、3章の2)のように波源が無くても界が存在し続ける条件$|\boldsymbol{\beta}|=k$, $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A}=0$を満たす電磁界を扱った。この章ではヘルムホルツの波動方程式で電流（波源）は残したままにして解く。また、直接$\mathbf{E}$または$\mathbf{H}$の波動方程式を解くのではなく、ベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$およびスカラーポテンシャル$\phi$を導入して電磁界を計算する。任意の波源分布による界を計算する表現が得られる。最後に、例として微小ダイポールの放射界を計算する。

（概要 まとめ）

まず、結論だけをまとめ、以後順番に説明していく。

$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{J}$

$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$




ベクトルポテンシャル

$\mu\mathbf{H} \equiv \nabla\times\mathbf{A}$

ベクトルヘルムホルツ方程式

$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$

解(Solution)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}\frac{e^{-jkr}}{r}dV_s + \frac{1}{4\pi}\oiint_S \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial n}\frac{e^{-jkr}}{r}dS_s - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \mathbf{A}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)dS_s \qquad (6.1)$$

放射条件　$r\left\{\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{A}+jk\mathbf{A}\right\}_{r=\infty} \to 0$　（外に波源、散乱体がない）　(6.2)

が成り立つとき、

自由空間のグリーン関数

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}\frac{e^{-jkr}}{r}dV \qquad (6.3)$$

フィールドはベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて次のように表される。

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \underbrace{\frac{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})}{j\omega\varepsilon\mu}}_{\downarrow\ -\nabla\phi}$$

電界と磁界が進行方向に横向き（垂直面内）

遠方界は TEM 波(Transverse Electric and Magnetic Wave)となる。

$|r|\to\infty$ のときは簡単になる（TEM 波）

$$\mathbf{E} = -j\omega(\mathbf{A}-\hat{r}(\mathbf{A}\cdot\hat{r}))$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta}(\hat{r}\times\mathbf{E}), \qquad \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \approx 120\pi$$

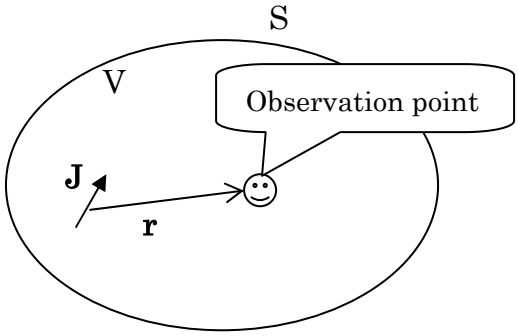
## 7.1 波源からの放射

ポテンシャルによる解法とヘルムホルツ方程式の導出

マクスウェルの方程式：

$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}$ ①

$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ ②




参考：

波源のあるところでは次のベクトル方程式の解を求めることになる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$
$$= -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}$$
$$= k^2\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J}$$

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ③

②より、$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$であるから(仮定 1)、ベクトル解析の公式(付録 A.6(7))より、$\mathbf{A}$(任意のベクトル関数)を導入して次のように書くことが出来る。

$\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ ④

ここで、$\mathbf{A}$はベクトルポテンシャルと呼ばれる。

参考：

ヘルムホルツの定理(付録 A.6(22))より、

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_p$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_r = \nabla \times \mathbf{A} & \text{(ソレノイダル・ベクトル)} \\ \mathbf{A}_p = \nabla\phi & \text{(ラメラー・ベクトル)} \end{cases}$$

ベクトル解析の公式(付録 A.6(8))より、$\nabla \times \mathbf{A}_p = 0$だから

$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}_r$

ここで、④では$\nabla \times \mathbf{A}$を指定しただけであり、まだ、$\mathbf{A}$を完全に指定した訳ではない。$\nabla \times \mathbf{A}_p = 0$ということを考えると$\mathbf{A}$は$\mathbf{A}_p = \nabla\phi$で表されるどのような関数$\mathbf{A}_p$を足しても④に矛盾を与えない。(※)

④を②に代入して、

$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\nabla \times \mathbf{A}$

$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0$

ベクトル解析の公式(付録 A.6(8))より、スカラー関数$\phi$を用いて次のように書く

ことができる。

$(\mathbf{E}+j\omega\mathbf{A})=-\nabla\phi$　　（仮定 2）

$\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{A}-\nabla\phi$　　⑤

**E** と **H** を **A** と $\phi$ で表すことができたので、④と⑤を①に代入して **A** と $\phi$ の方程式が得られる。

$\underline{\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}}=j\omega\varepsilon\mu(-j\omega\mathbf{A}-\nabla\phi)+\mu\mathbf{J}$

　　ベクトル解析の公式(付録 A.6(15))より、ベクトルラプラシアンを用いて、

$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=k^2\mathbf{A}-j\omega\varepsilon\mu\nabla\phi+\mu\mathbf{J}$

$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=\nabla(j\omega\varepsilon\mu\phi+\nabla\cdot\mathbf{A})-\mu\mathbf{J}$　　⑥

ここで、(※)より、$\nabla\cdot\mathbf{A}$ は定まっていないので、我々は自由に定めることができる（**A** にはまだ $\nabla\cdot\mathbf{A}$ を定める余地がある)。そこで、普通は次の 2 つの定め方、特に左の定め方（ローレンツ条件）がよく用いられる。

ローレンツ(Lorentz)条件

$\nabla\cdot\mathbf{A}+j\omega\varepsilon\mu\phi=0$　　⑦

⑦を⑥に代入して

$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}$　　⑧

$$\begin{cases}\mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E}=-j\omega\mathbf{A}+\dfrac{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})}{j\omega\varepsilon\mu}\end{cases}\quad ⑨$$

⑤, ⑦を③に代入

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}&=-j\omega\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{A}-\nabla^2\phi\varepsilon\\&=-\varepsilon(k^2\phi+\nabla^2\phi)=\rho\end{aligned}$$

$\nabla^2\phi+k^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$　　⑩

ヘルムホルツの波動方程式

（ベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルは同じ形の微分方程式を満足）

⑧で **A** を計算し、⑨で電磁界を計算できる。

異なるもの クーロン(Coulomb)条件

$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$　　⑦'

⑦'を⑥に代入して

$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=j\omega\varepsilon\mu\nabla\phi-\mu\mathbf{J}$　　⑧'

$$\begin{cases}\mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{A}-\nabla\phi\end{cases}\quad ⑨'$$

⑤, ⑦'を③に代入

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}&=-j\omega\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{A}-\varepsilon\nabla^2\phi\\&=-\varepsilon\nabla^2\phi=\rho\end{aligned}$$

$\nabla^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$　　⑩'

ポアソンの方程式

（スカラーポテンシャルは静電界のものと同じポアソンの方程式を満足）

⑧', ⑩'で **A**, $\phi$ を計算し、⑨'で電磁界を計算できる。

## コーヒー ブレイク（何故ポテンシャル A,$V$ を導入するのか?）

この議論に関しては参考文献[1](pp.189—197)に詳しく書かれている。また、[2](p.132)のコラムも一読の価値がある。

●ベクトルポテンシャルは単なる便利な計算の道具なのか？

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャル $V$ は単に計算の道具にすぎないのだろうか？電磁界の基礎方程式は $\mathbf{A},V$ を用いなくても電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ を記述できる。ベクトルポテンシャルを使うと、波源 $\mathbf{i},q$ から $\mathbf{E},\mathbf{H}$ を求める際に直接求めず、$\mathbf{A},V$ を経由して

$(\mathbf{i},q)\rightarrow(\mathbf{A},V)\rightarrow(\mathbf{E},\mathbf{H})$

と求める。そうすると計算が簡単になって便利だから $\mathbf{A},V$ を使うのだと言われるが、一概にそうとも言えない。

例えば静電界において、空間に分布した電荷 $\rho$ が作る電界を計算する場合にはまずスカラーポテンシャル

$$V(\mathbf{r}_o)=\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV_s=\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dV_s$$

を求め、微分演算して電界

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)=-\nabla_o V(\mathbf{r}_o)$$

を求める(下添字の $o,s$ はそれぞれ観測点、波源の座標系であることを意味する)。

直接電界を計算する場合は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)=\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}\frac{\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dV_s$$

とベクトル 3 成分の積分となり、さらに被積分関数内で波源から観測点に向かうベクトルの単位ベクトル $\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s/|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|$ の向きも変化する。この場合にはポテンシャルを導入した計算の方が簡単である。

しかし、静磁場において空間に分布した電流 $\mathbf{j}$ が作る磁界を計算する場合を考えよう。まずポテンシャルを利用して計算する場合、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_o)=\iiint_V \frac{\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}_s)}{4\pi r}dV_s=\iiint_V \frac{\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}_s)}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dV_s$$

を求め、微分演算して磁界

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_o)=\frac{1}{\mu_0}\nabla_o\times\mathbf{A}(\mathbf{r}_o)$$

を求める。直接磁界を計算する場合は

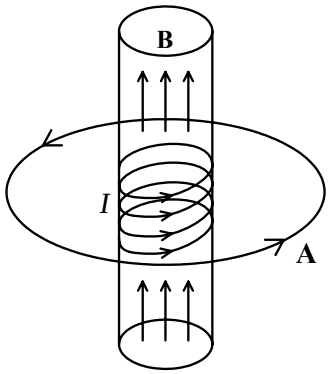
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_o)=\iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}\left[\mathbf{j}(\mathbf{r}_s)\times\frac{\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}\right]dV_s$$

となる。これはどちらが簡単かと言ったらすぐには判断できない。特に、リング状の電流の軸上の磁界を求めたいとする。そのときは対称性を利用すると電磁気学の問題によく出てくるように、直接**H**を求めるのはそう難しくはない。しかし、**A**を経由して計算しようとすると、**H**を計算するには**A**の微分を計算する必要があるので、**A**は軸上だけでなくその近傍の値も知る必要がある。したがって、最初から観測点を任意の場所にしておいて**A**を計算することになるので、その計算は非常に複雑になり、**A**を経由した方が**H**の計算が難しくなる。複雑な問題では普通ポテンシャル**A**,$V$を経由して**E**,**H**を計算した方が直接計算するよりも簡単になるのは事実だが、それだけで手の込んだ概念に思える**A**,$V$を導入する理由になるとは言いがたい。でななぜ導入するのだろうか？（波動工学テキスト pp.126-128 に書かれているように、遠方界の計算を行うときはいつでもベクトルポテンシャルを導入した方が計算は楽である）

●量子力学ではベクトルポテンシャルは世界を記述するのに本質的に必要である

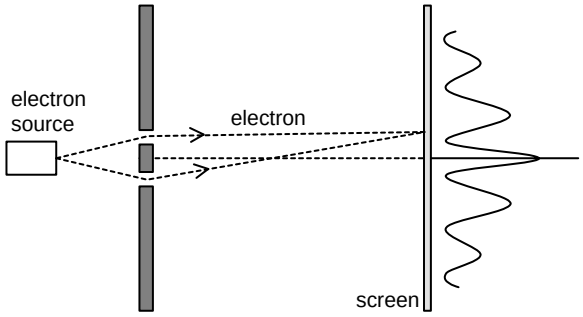
　量子力学で基礎方程式（シュレーディンガーの方程式）が発見されたときから、量子力学ではベクトルポテンシャル**A**は単なる計算の道具でなく、現実にあるものであると予測されていた。

　まず、次の図のような無限長ソレノイドを考えて見よう。

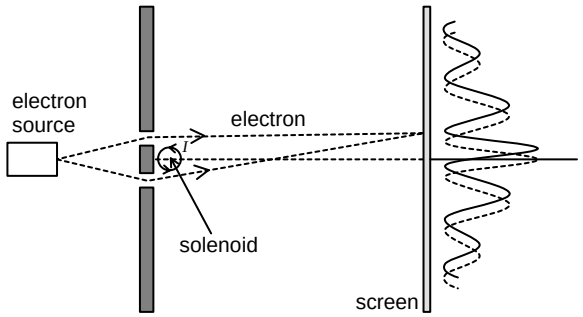



ソレノイド内のみに磁界が存在する。しかし、ベクトルポテンシャルはソレノイドの外にも存在する。ベクトルポテンシャルは計算に用いるだけのフィールドだから、もしソレノイド外を電荷などが通り過ぎても何も影響を受けないと考えられる。しかし、実は量子レベルでは電荷の運動はこのベクトルポテンシャルに影響を受けるのである。次の図に示す電子の２スリットでの回折実験は量子力学でよく出てくる。スクリーンに出来る干渉縞から電子がどちらのスリ

ットを通ったかは確率的にしか判断できないという波動関数の説明に使われる（片方ずつスリットを塞いで実験を行うと電子はどちらのスリットを通ったか確定し、干渉縞は見られない。しかし、同時に２つのスリットを開けてスクリーンに像を作ると干渉縞ができる。これは電磁波や音波でも当然の結果であるが、この実験では、電子を例え１つずつ飛ばしたとしても、干渉縞が得られ、スリットを１つずつ塞いだときとは違う結果が得られるのである。したがって、１つの電子なのにあたかも両方のスリットを抜けてきたかのような振る舞いをする)。




次に、上で述べた無限長ソレノイドを微小間隔のスリットの間に次の図のように配置しよう。ソレノイドの半径はスリット間隔に比べても十分小さいとする。




電子のスリットによる干渉パターンはどうなるだろうか？ソレノイドの外部には電界もないからクーロン力は受けないし、磁界もソレノイド内にしかないからローレンツ力も受けない、つまり電子の運動は何の影響も受けないだろうか？ソレノイドの外部にはベクトルポテンシャル **A** はある。これが単なる計算の道具ならば何の影響も受けない。しかし、量子力学によれば電子の運動はしっかり **A** の影響を受ける [1](p.195)。上の図のように干渉縞に影響が現れると量子論の理論から予測されたのである。この実験は Aharanov と Bohm が 1956 年に示唆して提案した実験である。しかし、この実験は量子レベルの話でスケールが小さく非常に難しかった。1987 年に日立製作所基礎研究所の外村彰博士が実験を行い、この問題に決着が付いた[3]。確かに量子レベルでは電子はベクトルポテンシャルの影響を受けるのである。上の実験の結果をアハラノフ・ボーム(AB)効果という。

●そもそもフィールドとは一体何だろうか？

**E**,**H** でも **A**,*V* でもよいが、そもそもフィールド（場，界）とは何だろうか？これは時間変化を考えるときに重要となる。時間変化を考慮すると **A**,*V* のポテンシャルの積分表現には $\exp(-jkr)$ が付いた。これはフーリエ変換では時間の遅延を表す。つまり、ある場所のフィールドは過去の波源分布の影響を反映したものとなる。もし、ニュートンの万有引力の法則やクーロンの法則のように時間変化無しで法則を記述すると、力は無限の遠方に瞬時に伝わっていることになる（これを**遠隔作用**と言う）。そうすると、無限の速さで宇宙の遥か彼方と情報通信できることになる。しかし、アインシュタインの相対性理論により、光速がこの世の最高速度で、それを超えることはできない。情報の通信も当然光速を超えることはできない。そこでフィールドという概念を使い、力が瞬時ではなく、だんだん時間変化して遠方に伝わっていくという様子を記述しているのである。さて、そのように考えると電界や磁界は本当に存在するのだろうか？我々は電界を測定するときにはアンテナを用いて電圧を測定したりする。何を測定しているのかと言うと、アンテナ上の電子が受ける力を電圧として測定しているのである。磁界の測定は普通半導体中の磁界が存在するときに電子やホールが受けるローレンツ力を利用したホール素子というデバイスを使う。いずれにしても古典力学が十分良い近似になっているマクロな世界では「力」というものが主役である（量子論のミクロな世界では「エネルギー」と「運動量」が主役となる）。その伝わり方を記述するのがフィールドであり、これが本当に物理的に存在するのかどうか、それを議論するのはあまり意味がない。ただ、力を矛盾無く記述するには必要であり、そういう意味では存在すると言っていい。ベクトルポテンシャルもその意味で存在するのである。

まとめると、電磁波というマクロな現象では **A**,*V* は計算の道具にすぎないと言ってもよいが、ミクロな量子力学においては **A**,*V*（電磁波と同じ定義）は本質的に必要である。従って、厳密な意味では **E**,**H** と **A**,*V* のどちらが物理を記述する直接的なものかと言うと **A**,*V* がより本質的であり、現代の物理学では **A**,*V* が主役になりつつある（量子レベルでなければそこまで考える必要はないが、興味を持って勉強してほしい）。

[参考文献]

[1] ファインマン，レイトン，サンズ，（宮島龍興 訳），ファインマン物理学 III 電磁気学，岩波書店, 1965

[2] 稲垣直樹，電磁気学，コロナ社, 2000

[3] http://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html

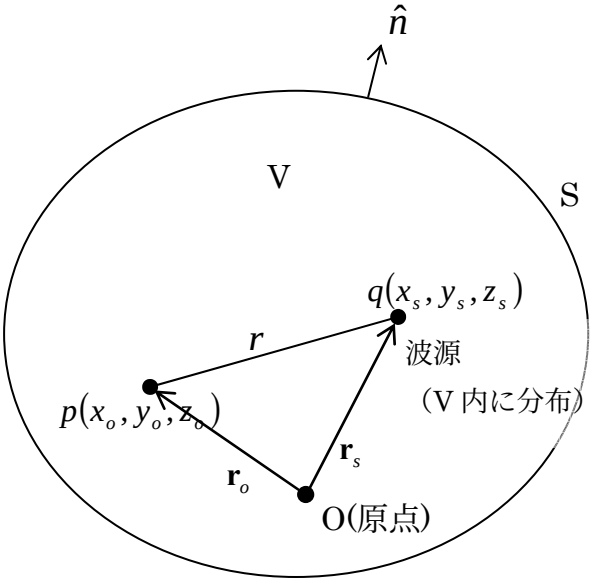
## 7.2 ヘルムホルツ方程式の解

非斉次ベクトルヘルムホルツ方程式(**Inhomogeneous Vector Helmholtz equation)**

$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}$　　(ヘルムホルツの波動方程式)

上の方程式はベクトルであるが、成分ごとに分けて考えると(付録 A.6(15))次のスカラーヘルムホルツ方程式を解く問題に帰着する。

**スカラーヘルムホルツ方程式の解 (Solution for the scalar Helmholtz equation)**




図のように体積$V$とその境界$S$があり、内部に波源が分布している。

$\nabla_o{}^2\phi+k^2\phi=-q$ ,　$k^2=\omega^2\varepsilon\mu$　　(ヘルムホルツの方程式)

$q(\mathbf{r}_s)=q(x_s,y_s,z_s)$　　(波源分布形状)

$\psi(\mathbf{r}_o,\mathbf{r}_s)=\psi(x_o,y_o,z_o;x_s,y_s,z_s)=\dfrac{e^{-jkr}}{r}$　　(自由空間のグリーン関数)

$r^2=|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|^2=(x_o-x_s)^2+(y_o-y_s)^2+(z_o-z_s)^2$　　(波源と観測点の距離の 2 乗)

$\nabla_o{}^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x_o{}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y_o{}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z_o{}^2}$　　(Laplacian)

●二つの予備的知識

$$\left[\begin{array}{l}\psi\text{は}\nabla^2\psi+k^2\psi=0\text{の解}\rightarrow\text{確かめ1}\\ \text{Greenの定理}\rightarrow\text{確かめ2}\end{array}\right.$$

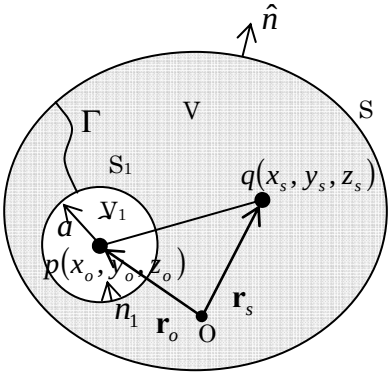
●方程式を解く

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\phi+k^2\phi=-q\\ \nabla^2\psi+k^2\psi=0\end{array}\right\}\rightarrow\iiint_V\left(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right)dV_s=\oiint_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s$$

下の図の$S_1$で囲まれた半径$a$の球は除いた部分$V-V_1$に対してグリーンの定理を適用する。なぜならば、もし$S_1$内の$\mathbf{r}_o$の位置も体積積分に含めてしまうと、$\mathbf{r}_s$を体積内でくまなく動かして体積積分したときに$\mathbf{r}_o=\mathbf{r}_s$となるときがあり、$\psi$が無限大に発散してしまうからである。そのとき、灰色の部分が上のグリーンの定理を適用する体積$V-V_1$となり、境界の面は$S+S_1+\Gamma$となる。$\Gamma$は複素関数論でもよく用いる手法であり、橋渡しする橋であり、ここでは被積分関数は連続となり、行きと帰りの経路で打ち消し合うから寄与はない。従って、

$$\iiint_{V-V_1}\left\{\phi\left(-k^2\psi\right)-\psi\left(-q-k^2\phi\right)\right\}dV_s=\iint_{S+S_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s$$

$$\iiint_{V-V_1}\psi q\,dV_s=\iint_{S+S_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s \qquad ①$$




右辺の計算

$S_1$上で

$$\iint_{S_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s$$

ここで、

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{jke^{-jkr}r+e^{-jkr}}{r^2}$$

また、$\mathbf{r}_s$は$S_1$上にあるので、$\left|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s\right|=r=a$

$$=\iint_{S_1}\left(\phi\frac{jke^{-jka}a+e^{-jka}}{a^2}-\frac{e^{-jka}}{a}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s$$

ここで、$a\rightarrow0$とすると、$\phi$は一定値に近づくはずなので（近づかなければならない）、

$$\lim_{a\to 0}\left[\phi\iint_{S_1}\frac{jke^{-jka}a+e^{-jka}}{a^2}dS_s-\frac{\partial\phi}{\partial n}\iint_{S_1}\frac{e^{-jka}}{a}dS_s\right]$$

$$=\lim_{a\to 0}\left[\phi\frac{jke^{-jka}a+e^{-jka}}{a^2}4\pi a^2-\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{e^{-jka}}{a}4\pi a^2\right]$$

$$=4\pi\phi$$

よって、①は

$$\iiint_V \psi q dV_s=\oiint_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s+4\pi\phi$$

$$\phi=\frac{1}{4\pi}\iiint_V \psi q dV_s-\frac{1}{4\pi}\oiint_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS_s$$

$$\phi=\frac{1}{4\pi}\iiint_V q\frac{e^{-jkr}}{r}dV_s+\frac{1}{4\pi}\oiint_S\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{e^{-jkr}}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right\}dS_s \qquad ②$$

[参考]

■ 右辺の$\phi$と$\dfrac{\partial\phi}{\partial n}$について

ここで、右辺の面積分の寄与は境界面 S に配置された波源による V の内部への寄与と解釈できる。これは**界等価定理(Field Equivalent Theorem)**と呼ばれる（この式の詳細な解釈は講義の範囲を超えるので説明しない。説明は大学院の電磁波特論[Advanced Electromagnetics]の講義で行う）。

式②をよく見ると、左辺の$\phi$を求めたいのに、右辺の面積分の項に$\phi$と$\dfrac{\partial\phi}{\partial n}$（境界 S 上での値）が含まれており、実質的には方程式が解けていないように思われる。しかし、S の外に波源や散乱体が無い場合、つまり自由空間を考えるときには面積分の項は消え失せる。これは放射条件(radiation condition)と呼ばれ球座標による積分で$dS_s=r^2\sin\theta$と考えると、

$$r^2\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{e^{-jkr}}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right\}=r^2\left\{\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{e^{-jkr}}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\right\}$$

$$=r^2\left\{\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{e^{-jkr}}{r}+\phi\frac{jke^{-jkr}r+e^{-jkr}}{r^2}\right\}=re^{-jkr}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial r}+\phi\frac{jkr+1}{r}\right\}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$$

よって、式②において$r\to\infty$で自然に 0 になる項を抜き落として、$r\left\{\dfrac{\partial\phi}{\partial r}+jk\phi\right\}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$が放射条件と呼ばれる。

また、境界 S が金属壁(PEC)や磁壁(PMC)のときは、$\phi$と$\frac{\partial\phi}{\partial n}$は直接与えることができる。境界で$\phi$の値を指定する問題をディリクレ問題、$\frac{\partial\phi}{\partial n}$の値を指定する問題をノイマン問題と呼ぶ。更に、誘電体境界などで、どうしても$\phi$と$\frac{\partial\phi}{\partial n}$がわからないときは、それらを未知数としておいて、各領域で問題を解き（未知数を用いて解を表現しておく)、最後に境界条件によってそれらの未知数を決定する問題となる。この解法は境界に未知数を配置するので境界要素法(Boundary Element Method)と呼ばれる。電磁界解析の問題では特にモーメント法(Method of Moments, MoM)と呼ばれることが多い。いずれにしても、右辺にある境界 S 上の$\phi$と$\frac{\partial\phi}{\partial n}$は問題にはならない。

**■グリーン関数について**

もう一度$\phi$の表現を見てみよう。式②は S 内(V 内)の値の計算法を示している。S 内では媒質は均一でなければならない(ヘルムホルツの方程式を解いたときに媒質は均一としたから)。しかし S の外にある媒質や波源の影響は全て境界 S 上にある等価波源$\phi$と$\frac{\partial\phi}{\partial n}$が担っており、S 内の$\phi$を計算するときには S 外は全て S 内と同じ媒質で満たされているときを考えてフィールドを重ね合わせればよいことがわかる。式②の$\phi$の表現の右辺の３つの等価波源の項には全て$\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$または$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)$がかかっているが、これらはδ関数で表現される単位波源が放射する界に等しく(例えば、$\phi=\frac{1}{4\pi}\iiint_V \delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)\frac{e^{-jkr}}{r}dV_s=\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$)、グリーン関数(Green's function)と呼ばれる。この場合のグリーン関数は「単位波源が自由空間に放射する界」という意味であり、式②の$\phi$の表現はグリーン関数に波源分布をかけて積分して重ね合わせているのであり、自由空間に放射する界の重ね合わせで、一般の境界があるときの界も表現できるのである。このグリーンのアイデアは非常に重要であり、革命的であった。

**■ベクトルヘルムホルツ方程式の解**

これより、成分ごとに分けて考えると式(6.1), (6.2)のベクトルヘルムホルツ方程式の解が得られる。

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}\frac{e^{-jkr}}{r}dV_s+\frac{1}{4\pi}\oiint_S\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial n}\frac{e^{-jkr}}{r}dS_s-\frac{1}{4\pi}\oiint_S\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)dS_s$$

放射条件　$r\left\{\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{A}+jk\mathbf{A}\right\}_{r=\infty}\to 0$　　(外に波源、散乱体がない)

## ヘルムホルツの方程式の特解　（確かめ１）

$\nabla_o{}^2\psi + k^2\psi = 0$ の特解を１つ求める。ただし、$\nabla_o = \dfrac{\partial^2}{\partial x_o{}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_o{}^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z_o{}^2}$ である。

解法１）

$$\psi(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) = \frac{e^{-jkr}}{r}$$

が $\nabla_o{}^2\psi + k^2\psi = 0$ を満たすことを確認する。

$$r = |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s| = \sqrt{(x_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2 + (z_o - z_s)^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_o} = \frac{\partial}{\partial x_o}\left[\left\{(x_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2 + (z_o - z_s)^2\right\}^{1/2}\right] = \frac{x_o - x_s}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_o{}^2} = \frac{r - (x_o - x_s)\dfrac{x_o - x_s}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - (x_o - x_s)^2}{r^3} = \frac{(y_o - y_s)^2 + (z_o - z_s)^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_o} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_o} = \frac{-jke^{-jkr}r - e^{-jkr}}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_o} = -\frac{e^{-jkr}}{r^2}(jkr+1)\frac{\partial r}{\partial x_o}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_o{}^2} = \frac{jke^{-jkr}r^2 + e^{-jkr}\cdot 2r}{r^4}\left(\frac{\partial r}{\partial x_o}\right)^2(jkr+1) - \frac{e^{-jkr}}{r^2}jk\left(\frac{\partial r}{\partial x_o}\right)^2 - \frac{e^{-jkr}}{r^2}(jkr+1)\frac{\partial^2 r}{\partial x_o{}^2}$$

（$y_o, z_o$ 成分についても同様）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_o{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_o{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_o{}^2}\right)\psi = (jkr+1)\frac{(jkr+2)e^{-jkr}}{r^3}\frac{r^2}{r^2} - \frac{e^{-jkr}}{r^2}jk\frac{r^2}{r^2} - \frac{e^{-jkr}}{r^2}(jkr+1)\frac{2r^2}{r^3}$$

$$= \frac{(jkr+1)(jkr+2)}{r^2}\frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{jk}{r}\frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{2(jkr+1)}{r^2}\frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$= \frac{e^{-jkr}}{r}\left(-k^2 + \frac{3jk}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{jk}{r} - \frac{2jk}{r} - \frac{2}{r^2}\right)$$

$$= -k^2\frac{e^{-jkr}}{r} = -k^2\psi$$

$\therefore\ \nabla_o{}^2\psi + k^2\psi = 0$　　（ただし、$r \neq 0$ の領域）■

解法 2)

$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ の特解 $\psi = C\dfrac{e^{-jkr}}{r}$ を導く。

解法 1 は天下り的な証明だったので、ここではもう少し導いた感じになる導出をしよう。

$\psi$ は方程式の形を見ると、方向に依らないので、点波源が $r=0$ にあるときを想定すると(そのとき、$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ の右辺は 0 ではないが、$r \neq 0$ では $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ が成り立つ)、解 $\psi$ には球対称性($\partial/\partial\theta = \partial/\partial\varphi = 0$)が仮定できる。
球座標で Gradient を表すと(付録 A.6(16))、

$$\nabla\psi = \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

(球対称性を仮定すると)

$$= \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

ラプラシアンは球座標 Divergence より(付録 A.6(17))

$$\nabla^2\psi = \nabla\cdot(\nabla\psi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial\psi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= 2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

よって、球座標で表現したヘルムホルツの方程式（斉次）は

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + k^2\psi = 0$$

$$r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r} + k^2 r\psi = 0$$

ここで、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\psi + r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

より、（ここがほんの少し天下り的だが、数学的に変形したことには間違いない）

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + k^2(r\psi) = 0$$

ここで、

$\Psi = r\psi$

とおくと、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Psi + k^2\Psi = 0$$

これは定数係数線形微分方程式だから簡単に解けて、

$\Psi = e^{\lambda r}$

とおき、

$(\lambda^2 + k^2)e^{\lambda r} = 0$

$\lambda = \pm jk$

外($r \to$大)に広がる波動を表現するために負号を採用する。

$\Psi = Ce^{-jkr}$　　($C$は$r$に依存しない定数)

よって、

$$\psi = C\frac{e^{-jkr}}{r} \quad \blacksquare$$

[参考]

**単位波源があるときのヘルムホルツの方程式（グリーン関数）**

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -\delta(\mathbf{r}) \qquad ①$$

ただし、$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ を解け

解）

$r \neq 0$では$\delta(\mathbf{r}) = 0$なので、$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$となる。従って、$r \neq 0$で

$$\psi = C\frac{e^{-jkr}}{r} \qquad ②$$

であるが、$r = 0$の波源条件から$C$を決定する。②を①に代入して

$\nabla^2\psi + k^2\psi = -\delta(\mathbf{r})$

これをデルタ関数の性質を使うために、全体積で積分する。ただし、球座標で積分すると楽なので、半径$r(\neq 0) \to 0$の球内で積分する。

$$\iiint_V (\nabla^2\psi + k^2\psi)dV = -\iiint_V \delta(\mathbf{r})dV$$

ここで、

○ $\iiint_V \nabla^2\psi dV = \iiint_V \nabla\cdot(\nabla\psi)dV = \oiint_S \nabla\psi\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \nabla\psi\cdot\hat{n}dS = \oiint_S \frac{\partial\psi}{\partial n}dS$

$$= C\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\underbrace{\frac{-jkre^{-jkr}-e^{-jkr}}{r^2}}_{=\partial\psi/\partial n}\underbrace{r^2\sin\theta d\theta d\varphi}_{=dS}$$

$$= -C\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(jkr+1)\sin\theta d\theta d\varphi \overset{r\to 0}{=} -C\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi$$

$$= -C[-\cos\theta]_0^{\pi}[\varphi]_0^{2\pi} = -C\cdot 2\cdot 2\pi = -4\pi C$$

○ $\iiint_V k^2\psi dV = k^2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\underbrace{\frac{e^{-jkr}}{r}}_{=\psi}\underbrace{r^2\sin\theta d\theta d\varphi}_{=dS} \overset{r\to 0}{=} 0$

○ $\iiint_V \delta(\mathbf{r})dV = 1$

より、

$-4\pi C = -1$

$C = \dfrac{1}{4\pi}$

よって、

$\psi = \dfrac{e^{-jkr}}{4\pi r}$

となる。■

**■インパルス応答とグリーン関数**

上の$\psi = \dfrac{e^{-jkr}}{4\pi r}$はベクトルポテンシャルの計算などによく出てくる係数で、グリーン関数(Green's function)と呼ばれる。上で導いたように$\psi = \dfrac{e^{-jkr}}{4\pi r}$の意味は単位波源による界を表し、信号処理の分野の線形時不変システムのインパルス応答を表している。つまり、任意波源に対する応答はデルタ関数を重ね合わせて波源を表現すればシステムは線形なのだから応答も重ね合わせ（畳み込み, convolution）で表現できるのである。式(6.3) の解釈としてはこのようにデルタ関数的波源によるインパルス応答の重ね合わせと解釈すると分かりやすく、次のように$\mathbf{J}$と$\psi$の畳み込み$\mathbf{J}*\psi$で表現できる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_o) = \mu\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_s)\frac{e^{-jk|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dV_s = \mu\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_s)\psi(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)dV_s = \mu(\mathbf{J}*\psi)(\mathbf{r}_o)$$

電磁波の勉強をしているときもフーリエ変換との関係、信号処理との関係を意識して勉強すると面白い。

■**遅延ポテンシャル(retarded potential)**

式(6.3)をもう一度書くと($\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}$ の解)、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_o)=\iiint_V \frac{\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}_s)\,e^{-jkr}}{4\pi r}dV_s$$

ここで、$r=|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|$。もちろん、自由空間でのスカラーポテンシャルは($\nabla^2\phi+k^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ の解)

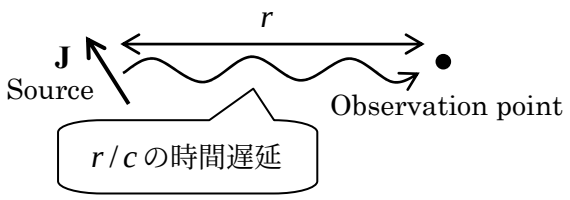
$$\phi(\mathbf{r}_o)=\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_s)\,e^{-jkr}}{4\pi\varepsilon r}dV_s$$

となる。ここで、$\phi$において、$k=0$(周波数を 0 にする)とすると$e^{-jkr}=1$となって、(静)電磁気学で習ったポテンシャルと一致する。ここでは、$\mathbf{A}$にも$\phi$にも現れる$e^{-jkr}$の効果について説明しよう。今、電磁界を複素表現して考えている(周波数領域$\omega$で考えている)ので$e^{-jkr}$という位相変化項は時間遅延を表す。つまり、フーリエ変換を使って、例えば$\phi$を時間表現に戻すと(単一周波数の正弦波波形ならば$\mathrm{Re}[\phi e^{j\omega t}]$で考えてもよい。一般の時間波形は次のように扱う)、

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}_o,t)=\mathsf{F}^{-1}[\phi]=\iiint_V \frac{\mathsf{F}^{-1}[\rho(\mathbf{r}_s)\,e^{-jkr}]}{4\pi\varepsilon r}dV=\iiint_V \frac{\mathsf{F}^{-1}[\rho(\mathbf{r}_s)\,e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}r}]}{4\pi\varepsilon r}dV$$

$$=\iiint_V \frac{\bar{\rho}(\mathbf{r}_s,t-\sqrt{\mu\varepsilon}r)}{4\pi\varepsilon r}dV_s=\iiint_V \frac{\bar{\rho}(\mathbf{r}_s,t-\dfrac{r}{c})}{4\pi\varepsilon r}dV_s$$

となって、観測点$\mathbf{r}_o$では$\mathbf{r}_s$の場所にある波源の影響が時間$\tau=r/c$だけ遅れて伝わる(時間遅延)ことを意味している。このような意味から、$e^{-jkr}$を含むポテンシャルは**遅延ポテンシャル(retarded potential)**と呼ばれる。電界・磁界はポテンシャルを観測点で場所微分するだけなので、波源の電界・磁界への影響はポテンシャルと同じ時間遅延がある。このように、波源の影響が回りのフィールドを変化させ、時間とともに移動して遠方に伝わっていくという考え方を「近接作用」と言う。一方、(静)電磁気学で習ったクーロンの法則などは波源の影響が瞬時的に無限遠に及んでいるように見える。そのような考えを「遠隔作用」と言う(これは実際にはこの世の最高速は光速であるという相対性理論の結論から考えるとおかしい)。ちなみに、クーロン条件(クーロンゲージ)のスカラーポテンシャルの表現はポアソンの方程式になり、一見遠隔作用のように見えるが、これはゲージ変換の自由度として解釈される。



グリーンの定理(Green's Theorem) (確かめ２)

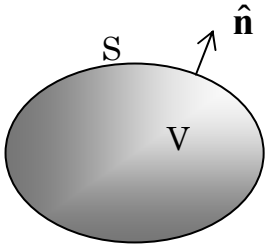
次の定理はグリーンの定理と呼ばれ、面積積分と体積積分とを関係づける重要な定理である。閉曲面$S$で囲まれた領域$V$で、２つのスカラー場$\phi,\psi$が定義されているとき、次の公式が成り立つ。

Green の第一公式

$$\oiint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \iiint_V \left\{ \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi)\cdot(\nabla \psi) \right\} dV$$

Green の第二公式

$$\oiint_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V \left\{ \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right\} dV$$




ここで、$n$はＳの内部から外側に向かうＳに垂直方向の座標であり、$\hat{\mathbf{n}}$は外向き法線単位ベクトルである。ただし、$\dfrac{\partial \psi}{\partial n} = (\nabla \psi)\cdot \hat{\mathbf{n}}$

<u>証明</u>

ベクトル解析の公式から

$$\nabla\cdot(\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\phi$$

ここで、$\mathbf{A} = \nabla\psi$とおく。

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)$$

これを領域Ｖで体積積分する。

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)dV = \iiint_V \left\{ \phi\nabla^2\psi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) \right\} dV \qquad \text{----①}$$

一方、左辺はガウスの発散定理（$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$）より、

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)dV = \oiint_S (\phi\nabla\psi)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \oiint_S (\phi\nabla\psi)_n dS = \oiint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \qquad \text{----②}$$

$n$成分

式①、式②より、

$$\oiint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS = \iiint_V \left\{ \phi\nabla^2\psi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) \right\} dV \qquad \text{----③}$$

これで Green の第一公式が得られた。

次に、式③で$\phi$と$\psi$を入れかえると

$$\oiint_S \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \iiint_V \left\{ \psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi) \right\} dV \qquad \text{----④}$$

式③、式④の辺々の差をとると、

$$\oiint_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V \left\{ \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right\} dV$$

これが Green の第二公式である。　<Q.E.D.>

（補足説明）　部分積分とグリーンの定理

Green の第一公式

$$\oiint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_V \left\{ f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \right\} dV$$

これを変形すると、

$$\iiint_V f \nabla^2 g dV = \oiint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS - \iiint_V (\nabla f) \cdot (\nabla g) dV$$

これは１次元（１変数）の部分積分

$$\int_a^b f(x) g''(x) dx = \left[ f(x) g'(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g'(x) dx$$

に対応しており、グリーンの定理は部分積分の多次元への拡張と解釈することもできる。

コーヒー ブレイク（グリーンについて）

グリーンの定理（体積積分の値をその境界の周回面積分に変換、あるいはその逆の操作を行うために使われる）はベクトル解析で習うが、電磁気学で頻繁に使う「ガウスの発散定理」や「ストークスの定理」に比べると存在感が薄い。しかし、グリーン関数のアイデアは物理、工学において非常に重要な概念である。ここでは、グリーンの定理に親しみを感じてもらうためにグリーン（人物名）の話をしよう。

グリーン(George Green, 1793-1841)とはどのような人物だったのだろうか？ジョージ・グリーンは 1793 年にイギリスのノッチンガム(Nottingham)という工業都市（地方都市）に生まれ、1841 年に病没している。父親の学問に対する無理解もあって、グリーンは若い頃は学問に専念できず、高等教育は受けていなかった。グリーンの父親は地元で繁盛したパン屋を営んでおり、事業を拡大して製粉業も営むようになり相当な資産家になったようである。グリーンもその後を継ぐことになるが、独学でフランスの論文（イギリスではない）を読んで勉強をし、父親の死後は番頭格の人物に家業を任せて、本格的に学問に専念し、35 才のときにグリーンの公式を含む論文（エッセイと名付けられている）をノッチンガムで発表した（自費出版に近かったらしい)。グリーンが考えたグリーン関数のアイデアの重要性は現在ではよく認識されているが、当時はまわりに理解されず、グリーンの死後(出版の 20 年後)にウィリアム・トムソン（William Thomson, 後にケルヴィン卿となる）にそのアイデアの革新性が認識されるまでは知られていなかった。グリーンの遺族もグリーンがそんなに偉大な人物とは知らなかったために資料は散逸し、肖像画も残っていないそうである。

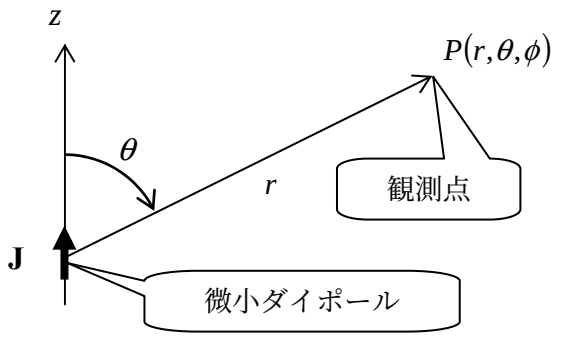
参考文献

〇数学セミナー, 「知られざるグリーン」, 日本評論社, vol.42, no.7, pp.45-49, 2003 年 7 月号

## 7.3 微少ダイポールからの放射　（計算例）

波源によるベクトルポテンシャルの計算の理論的導出について説明したので、ここでは例として微小ダイポールの計算をする。波長に比して非常に短い波源（電流源）を**微小ダイポール(infinitesimal dipole)**と言う。自由空間に置かれた微小ダイポールを考えるので、面積分の項は消える。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}\frac{e^{-jkr}}{r}dV$$




ディラックのデルタ
（δ関数）

$$\mathbf{J} = \hat{z}I\delta(x)\delta(y)f(z)$$

$$f(z) = \begin{cases} 1 & (0\sim l) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

（電流は時間的に正弦波的に変化する。微小なコンデンサーが微小ダイポールの位置に置かれており、それが交流で励振されている状態をイメージしても良い）

$$dV = dxdydz$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{z}I\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{z=-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)f(z)dxdydz \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{z}I\underbrace{\int_{x=-\infty}^{\infty}\delta(x)dx}_{=1}\underbrace{\int_{y=-\infty}^{\infty}\delta(y)dy}_{=1}\underbrace{\int_{z=0}^{l}f(z)dz}_{=l} \qquad ① \\ &= \frac{\mu Il}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{z}\end{aligned}$$

これを用いて、電磁界は次式で計算

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\varepsilon\mu} \qquad ②$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \qquad ③$$

まず、①，③より、極座標で磁界を計算する。

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mu H_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right\}$$

$$\mu H_\theta = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right\}$$

$$\mu H_\phi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I l e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu I l e^{-jkr}}{4\pi r}(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\mu I l e^{-jkr}}{4\pi}\sin\theta\right) = -\frac{\mu I l}{4\pi}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(e^{-jkr}) = jk\frac{\mu I l}{4\pi}e^{-jkr}\sin\theta$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu I l e^{-jkr}}{4\pi r}\cos\theta\right) = \frac{\mu I l e^{-jkr}}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\right) = -\frac{\mu I l e^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta$$

－－－－－－－－－－－－－－－－

$$H_r = H_\theta = 0$$

$$H_\phi = \frac{1}{\mu r}\left(jk + \frac{1}{r}\right)\frac{\mu I l}{4\pi}e^{-jkr}\sin\theta$$

$$= \frac{jkIl}{4\pi r}\sin\theta\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)e^{-jkr}$$

$$= \frac{jIl}{2\lambda r}e^{-jkr}\sin\theta\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)$$

次に、①，②を用いて電界を計算する。

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{j\omega\mu}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial z}A_z, \qquad A_z = \frac{\mu I l}{4\pi r}e^{-jkr}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right), \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right), \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu I l}{4\pi}\left(-\frac{e^{-jkr}}{r^2}(jkr+1)\frac{z}{r}\right)$$

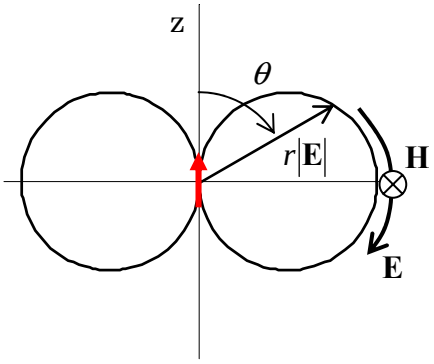
$$= \frac{\mu I l}{4\pi}\frac{-(jkr+1)}{r^2}e^{-jkr}\cos\theta$$

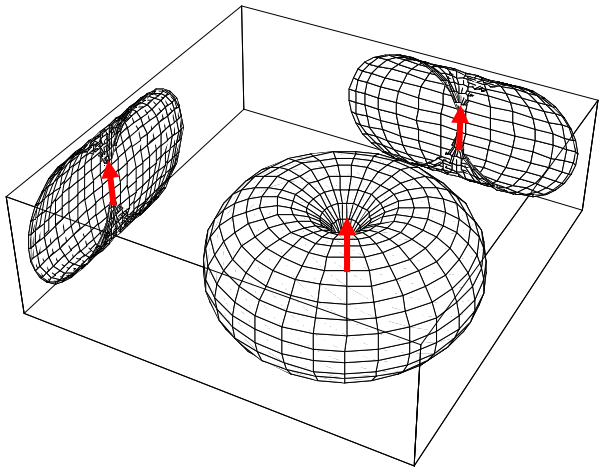
－－－－－－－－－－－－－－－－

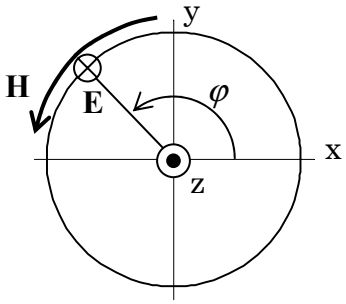
$$\mathbf{E} = \hat{r}\frac{\eta I l}{2\pi r^2}e^{-jkr}\left(1+\frac{1}{jkr}\right)\cos\theta + \hat{\theta}j\frac{\eta I l}{2\lambda r}e^{-jkr}\left(1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{(kr)^2}\right)\sin\theta + \hat{\phi}0$$

$kr >> 1$（遠方界）

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \hat{\theta} j \frac{\eta I l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin\theta \\ \mathbf{H} &= \hat{\phi} j \frac{I l}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin\theta\end{aligned}\right) \qquad E_\theta = \eta H_\phi, \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

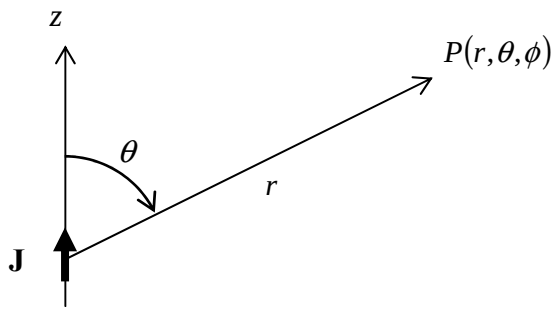





上の図は極座標で描き、半径として遠方界の相対強度 $r|\mathbf{E}|$ or $r|\mathbf{H}|$ を描いたグラフで、指向性 (directivity, radiation pattern) と言う。遠方界だから、電界と磁界の大きさは界インピーダンス $\eta$ で比例関係にあり、どちらを描いても指向性は変わらない。また、横軸が方向、縦軸が遠方界強度のカルテシアン座標が使われることもある。遠方界強度の座標は対数を取ってデシベル表示することもあり、レベルの小さな場所の違いを見たいときはデシベル表示し、レベルの大きなところの変化を見たいときは対数を取らずに表示することが多い。工学のアンテナの問題ではデシベル表示することがほとんどである。上の微小ダイポールの指向性はデシベル表示しておらず、z 軸を含む面でカットされた３次元指向性の断面は上の左の図のような「８」の字の形になる。したがって、微小ダイポールの指向性は８の字指向性と呼ばれる。電流の流れる方向には放射せず、垂直方向に強く放射することがわかる。電流に垂直な面（x-y 平面）内の指向性は一様で円形となり、全方向性(omni directional)と呼ばれる。また、微小ダイポールの x-y 面内はその上に磁界を含むので磁界面(H 面)と言い、x-y 面内の指向性を磁界面内指向性(H 面指向性)と言う。z 軸を含む面でカットした面はその上に電界を含むので電界面(E 面)と言い、その面内の指向性を電界面内指向性(E 面指向性)と言う。

微小ダイポールの界のまとめ




$$\mathbf{H} = \left\{ \underline{\frac{jIl}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin\theta} + \underline{\frac{Il}{4\pi r^2} e^{-jkr} \sin\theta} \right\} \hat{\phi}$$

放射界　　誘導界　　ビオ・サバール

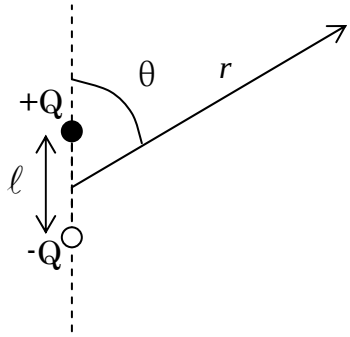
$$\mathbf{E} = \underline{j\frac{\eta Il}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin\theta\hat{\theta}} + \underline{\frac{\eta Il}{2\pi r^2} e^{-jkr} \cos\theta\hat{r}} + \underline{\frac{\eta Il}{4\pi r^2} e^{-jkr} \sin\theta\hat{\theta}}$$

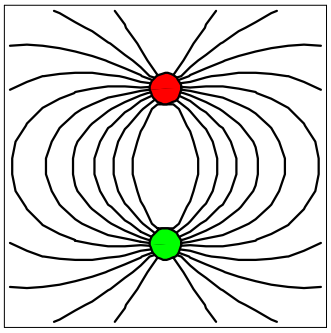
$$\left. \begin{array}{l} + \dfrac{\left(\frac{Il}{j\omega}\right)}{2\pi\varepsilon r^3} \cos\theta e^{-jkr} \hat{r} \\ + \dfrac{\left(\frac{Il}{j\omega}\right)}{4\pi\varepsilon r^3} \sin\theta e^{-jkr} \hat{\theta} \end{array} \right) \text{準静電界}$$

$$\frac{Il}{j\omega} = Ql$$ ：ダイポール・モーメント

## ダイポールモーメントと準静電界項の対応

$$\frac{d}{dt}Q = I \quad , \quad j\omega Q = I \quad , \quad I\ell = j\omega\ell Q$$



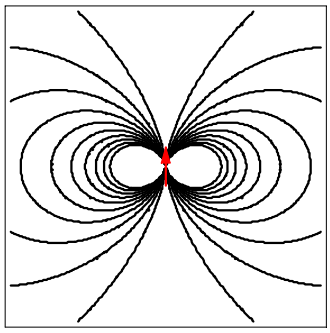



$$\mathbf{E} = -\nabla\Psi = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\right)$$

$$\Psi = \frac{Q\ell}{4\pi\varepsilon}\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad \text{（後述）}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{Q\ell}{4\pi\varepsilon}\right)\left(-2\frac{\cos\theta}{r^3}, -\frac{\sin\theta}{r^3}, 0\right) \qquad (r\,l << r)$$

$$= \frac{Q\ell\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3}\hat{r} + \frac{Q\ell\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3}\hat{\theta} \qquad \rightarrow \text{前頁の準静電界}$$



ポテンシャルの計算

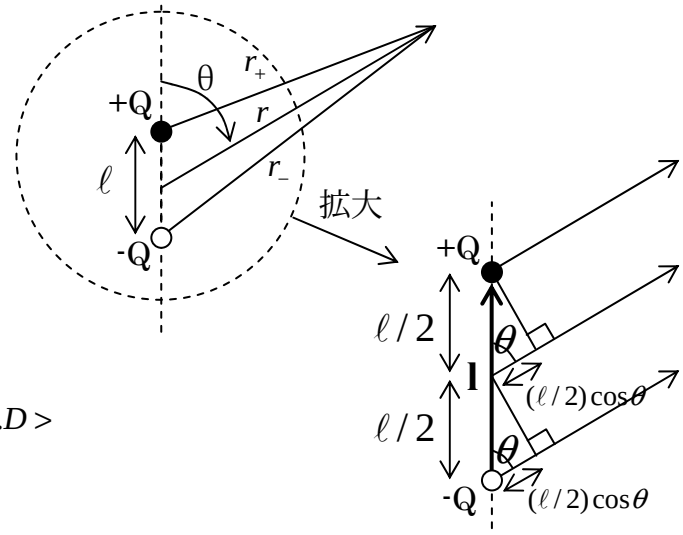
$$\Psi_+ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_+}, \quad \Psi_- = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r_-}$$

$$r_+ = r + \frac{l}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

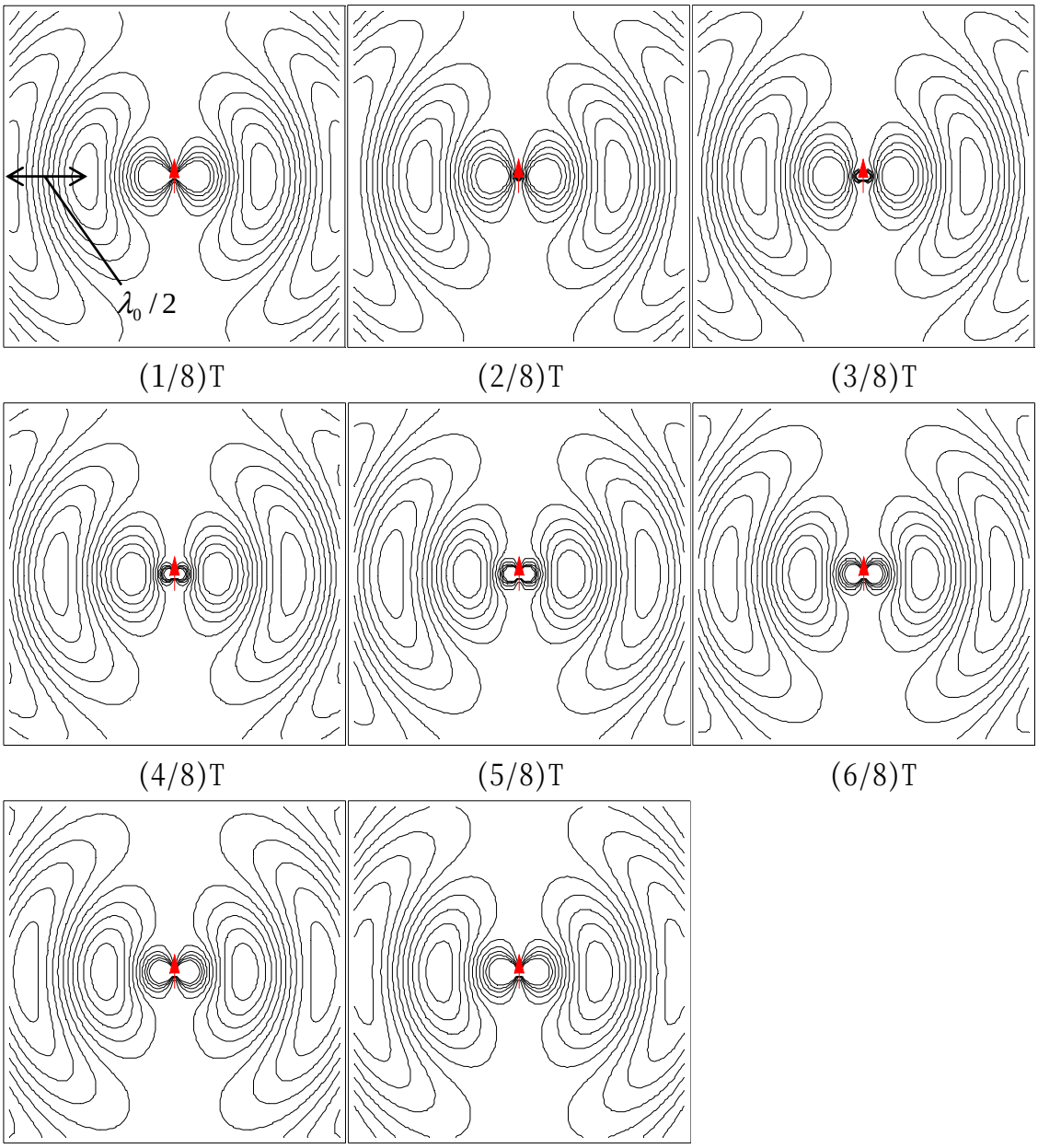
$$r_- = r - \frac{l}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = r + \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\Psi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{l\cos\theta}{r^2} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon}\frac{\cos\theta}{r^2} \qquad < Q.E.D >$$



# 微小ダイポールから放射される電気力線の時間変化




T: 周期

http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/smalldipole/smalldipole-j.html

コーヒー ブレイク（ヘルツの実験）

マクスウェルが予言した電磁波を実験的に発生させて確認したのはハインリッヒ・ヘルツ(Heinrich Rudolph Hertz, ドイツ, 1857-1894)であり、1888 年に確認された。その実験装置は空間に火花放電を起こさせるものだった（マクスウェルの方程式を見ると、電流が空間中に流れるというように読み取れるため、空間に電流を流すようにすることを考えたのだと思う。実際には空間でなくても、金属の上に電流を流しても電磁波が放射されることが後からわかったのだが)。ヘルツは実験家であるだけでなく、理論家でもあり、1889 年に現在「微小ダイポール(infinitesimal dipole)」として知られる波源から放射される電磁界をマクスウェルの方程式から導出し、平面波以外の波源があるときのマクスウェルの方程式の界を計算して、電気力線を描いている。それ故、微小ダイポールはヘルツダイポール(Hertz dipole)と呼ばれることもある。

参考文献

○H. Hertz: Electric waves, pp.144-145, Dover pub inc.