2. 電気回路解析の基礎

1章で述べたように電子回路の設計解析には電子デバイスの知識と電気回路解析の知識 が必要である。そこでこの章では電気回路解析の基礎について概説する。主としてキルヒ ホッフの法則とラプラス変換について述べるが、既に学ばれた方も多いと思われるのでポ イントのみを解説する。

2.1 電子回路の構成

図 2.1 は 1 章の図 1.1 に示した MOS トランジスタを用いた高周波信号の増幅器を表している。



図 2.1 MOS トランジスタを用いた高周波増幅器

図に示すように電子回路は、

- 1) 電圧源や電流源などの独立電源
- 2) 抵抗 R、容量 C、インダクタ L などの受動素子

MOS トランジスタ、バイポーラトランジスタ、ダイオードなどの能動素
 子

から構成され、電圧や電流などを入出力信号として出力端に現れる信号の時間変化や周波 数変化を利用するものであると言える。したがって、まずこれらの性質と関係を知る必要 がある。

2.2 信号源

2.2.1 電圧源

電圧源は電池のように、流れ出る電流に拘わらずほぼ一定電圧の電圧を発生するもので、

電池のような直流電圧だけでなく、家庭用の 100V 電源のような交流電圧を発生させるもの も含まれる。実際の電圧源は流れ出る電流が多くなると図 2.2 のように電圧が低下する。そ こで一般的にはこの効果を入れて図 2.3 に示す等価回路を用いる。Vo は端子 1,1 間を開放 して回路系に電流が流れないときの電圧で、開放電圧という。Ro は電流が流れて出力電圧 VLが低下することを表し、内部抵抗という。流れる電流 Io と出力電圧 VLには



流れる電流

図 2.2 実際の電圧源の電圧電流特性



図 2.3 電圧源の等価回路

 $V_L = V_o - I_L R_o$ (2.1)

の関係がある。

ところで、図 2.3 に示した等価回路を用いて負荷抵抗を変化させたときに負荷抵抗に取り 出される電力 PL を求めてみる。負荷抵抗を流れる電流は L は、

$$I_L = \frac{V_o}{R_o + R_L} \quad (2.2)$$

であるから、電力 PLは



図 2.4 負荷抵抗と取り出せる電力

$$P_{L} = I_{L}^{2} R_{L} = \left(\frac{V_{o}}{R_{o} + R_{L}}\right)^{2} R_{L} = \frac{R_{L}}{\left(R_{o} + R_{L}\right)^{2}} V_{o}^{2} \quad (2.3)$$

となる。図 2.4 に RL(= α Ro)を変化させたときの電力 PLを示す。PL は RL=Roのときに最 も大きな電力 Pmax となる。このときの Pmax は、 $P_{max} = \frac{V_o^2}{4R_o}$ (2.4)

となる。この P_{max} はその電圧源が負荷に供給可能な最大の電力を示し、電源の有能電力 という、また最大の電力を取り出すために負荷抵抗を電源の内部抵抗に一致させることを インピーダンス整合という。

2.2.2 電流源

電流源はバイポーラトランジスタのコレクタ電流もしくは MOS トランジスタのドレイン 電流のように印加される電圧に拘わらずほぼ一定の電流が流れるものを指す。しかしなが ら実際は端子間電圧が大きくなると図 2.5 のように負荷を流れる電流は減少する。したがっ て等価回路は図 2.6 に示すものになる。Ⅰ。を短絡電流、ℝ。を内部抵抗という。出力電圧 VL と負荷に流れる電流は

$$I_{L} = I_{o} - \frac{V_{L}}{R_{o}}$$
 (2.5)

の関係がある。

2.2.3 電圧源と電流源の等価性

図 2.6 に示した電流源に負荷抵抗 RLを接続したときに 図 2.5 電流源の電圧電流特性 負荷を流れる電流 ILと発生する電圧 VLは

$$I_{L} = \frac{R_{o}}{R_{o} + R_{L}} I_{o}$$
 (2.6a)

$$V_{L} = \frac{R_{o}R_{L}}{R_{o} + R_{L}}I_{o} (2.6b)$$



したがって、図 2.7 に示すように $I_o = \frac{V_o}{R_o}$ とおけば電圧源と電流源は等価になる。



図 2.6 電流源と発生電圧

2.2.4 制御電源

以上述べた電圧源と電流源は周りに接続される回路に無関係で独立した存在である。これ に対し電源の電圧や電流が、回路のある部分の電圧や電流により制御される電源を制御電 源という。制御電源は図 2.8 に示すように制御する量と制御される量が電圧か電流かに応じ て4種類考えられる。図に示すように制御電源は制御側の端子 1·1'と出力側の端子 2·2'を有 する4端子回路である。

(1) 電圧制御電圧源

出力端子の電圧が入力端子に加えら れた電圧 v1 によって決定される電圧 源で、A は比例定数である。入力端子 間にインピーダンスは無限大で端子 間に電流は流れない。

(2) 電圧制御電流源出力端子の電流が入力端子に加えら

れた電圧 v1 によって決定される電圧 源で、gm は(S)の単位を持つ定数であ



図 2.8 制御電源

り、相互コンダクタンスと呼ばれる。入力端子間にインピーダンスは無限大で端子間 に電流は流れない。

(3)電流制御電圧源

出力端子の電圧が入力端子に加えられた電流 i1 によって決定される電圧源で、rm は (Ω)の単位を持つ定数であり、相互抵抗と呼ばれる。入力端子間には電流が流れるが入 力端子の電圧はゼロであり、インピーダンスはゼロである。

(4)電流制御電流源

出力端子の電流が入力端子に加えられた電流 i1 によって決定される電圧源で、β は比 例定数である。この場合も入力端子間には電流が流れるが入力端子の電圧はゼロであ り、インピーダンスはゼロである。

2.2.5 重ねの理

多数の電圧源や電流源が存在する線形回路における電圧と電流は個々の電圧源や電流源 が単独に存在し、残りの電圧源を全て短絡、残りの電流源を全て開放にした場合の電圧ま たは電流の和となる。これを重ねの理という。例えば図 2.9(a)は電圧源と電流源を含む回路 である。この回路のインピーダンス ZL の電流 IL は図(b),(c),(d)のそれぞれの場合の電流の和 として求められる。つまり

 $i_L = i_L^{'} + i_L^{''} + i_L^{'''}$ (2.7)

となる。

この重ねの理は回路が受動素子のみで構成されている場合に成立し、トランジスタやダイ オードなどの能動素子が含まれる場合は成立しないが、この場合も近似的に線形と見なせ る場合にはある精度レベルで使用できる。



図 2.9 重ね合わせの理

 $\mathbf{5}$

2.3 受動素子

受動素子は抵抗 R、容量 C、インダクタ L であるが、これらの素子は電圧・電流特性が異なっている。

2.3.1 抵抗

抵抗は図2.10に示すように印加される電圧Vと流れる電流Iが比例係数RもしくはGで 結ばれている。

V = RI (2.8a) I = GV (2.8b)

$$\mathbf{V} \stackrel{\mathsf{O}}{|} \overset{\mathsf{O}}{\underset{\mathsf{O}}{|}} \mathbf{I} \quad R = \frac{1}{G}$$

図 2.10 抵抗の電圧・電流特性

この比例係数 R を抵抗(Ω)、G をコンダクタンス(S)という。

ところで、電子回路では静的抵抗と動的抵抗を区別して用いる。図 2.11 はダイオードの 電流・電圧特性を示している。電圧は電流には線形には比例せず、非線形な特性を示す。 静的抵抗 R₀とはダイオードに流れている電流 I₀で発生している電圧 V₀を割ったものであ る。したがって、

$$R_{o} \equiv \frac{V_{o}}{I_{o}} \quad (2.9)$$

これに対し動的抵抗 r_{o} とは、電流 I_{o} における電圧変 化 ΔV と電流変化 ΔI の比を表し、

$$r_o = \frac{dV}{dI} \bigg|_{I=I_o} (2.10)$$



図 2.11 ダイオードの電圧・電流特性

と表現される。この動的抵抗は電子回路で良く用いられるバイアス点での電流変化に対す る電圧変化の算出に用いられる。同様に静的コンダクタンスと動的コンダクタンスは以下 のようになる。

$$G_o \equiv \frac{I_o}{V_o} \quad (2.11a)$$
$$g_o \equiv \frac{dI}{dV} \Big|_{V=V_o} (2.11b)$$

т

2.3.2 容量

容量の蓄積電荷と端子間電圧は比例するが、電流は電荷の時間微分であるので、端子間 電圧は電流の時間積分値に比例し、流れる電流は端子間電圧の微分に比例する。

(1)電荷および電圧・電流関係

図 2.12 に示す容量 C の 2 つの電極に電荷+Q および電荷-Q が保存されているとき、発生 する電圧 V は

$$V = \frac{Q}{C} \quad (2.12)$$



となる。あるいは、電圧 V が印加されたとき発生する電荷 図 2.12 容量の電荷と電圧 Q は、

Q = CV (2.13)

である。つまり電流が流れなくても一定電圧が発生する。 電流 I は蓄積電荷 Q の時間変化なので、容量の電圧依存が無い場合は

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} \quad (2.14)$$

となり、流れる電流は容量値と電圧の時間変化率の積に比例する。 従って電圧 V は積分形式を用いることで、

$$V(t) = \frac{1}{C} \left[\int_{t_0}^t I(t) dt + Q_0 \right]$$
(2.15)

と表される。つまり、電流の積分値を容量値で割ったものに比例し、初期電荷 Q₀を有する。

(3) 電荷保存則

容量には容量の接続端から流れ出る電流が無ければその電荷が保存されるという性質がある。

図 2.13 に示す容量 C1, C2 を直列に接続した回路にスイッチ S1 を閉じて電圧 Vo を印加す

ると電圧 V1, V2は、

$$V_0 = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$
(2.16)

となる。スイッチが閉じられる前の P 点の電荷を Q₀ とすると、この電荷は電荷保存則よ りスイッチが閉じられた後でも等しく、また、

$$Q_0 = Q_2 - Q_1$$
 (2.17)

であるので、

$$Q_{1} = \frac{C_{1}}{C_{1} + C_{2}} \left(C_{2}V_{0} + Q_{0} \right)$$

$$Q_{2} = \frac{C_{2}}{C_{1} + C_{2}} \left(C_{1}V_{0} + Q_{0} \left(1 + 2\frac{C_{1}}{C_{2}} \right) \right)$$
(2.18)



図 2.13 電荷保存則(直列接続)

$$\begin{split} V_{1} &= \frac{Q_{1}}{C_{1}} = \frac{C_{2}V_{0} + Q_{0}}{C_{1} + C_{2}} \\ V_{2} &= \frac{Q_{2}}{C_{2}} = \frac{C_{1}V_{0} + Q_{0}\left(1 + 2\frac{C_{1}}{C_{2}}\right)}{C_{1} + C_{2}} \end{split} \tag{2.19}$$

と求められる。つまり、発生する電圧は印加電圧だけでなく、初期電荷の影響を受ける。 別の例を示す。

図 2.14 に示した回路において、スイッチSを閉じる前に容量 C_1, C_2 に電圧 V_1, V_2 が印加 され、それぞれ電荷 Q_1, Q_2 が蓄積されているとき、スイッチSを閉じると、容量 C_1, C_2 の 電圧は等しくなるのでこれを V とするとこのときの電荷を Q'_1, Q'_2 として以下が成り立つ。

$$V' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} (2.20)$$

電荷保存則より P 点の電荷が保存されるので、

$$-(Q_1 + Q_2) = -(Q'_1 + Q'_2) \quad (2.21)$$



図 2.14 電荷保存則(並列接続)

したがって、

$$V' = \frac{Q_1' + Q_2'}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \quad (2.22)$$

このように、容量を用いた回路では電荷保存則を用いることによって解を得ることができる。電荷保存則は電荷不変則とも呼ばれる。

2.3.3 インダクタ

インダクタは発生する磁束と流れる電流は比例するが、発生する電圧は磁束の時間変化に 比例するので発生電圧はインダクタを流れる電流の時間変化に比例する。

(1)磁束および電圧・電流関係

インダクタは図 2.15 に示すように磁性体もしくは空芯に巻線したものを言い、巻数 Nの インダクタの電流 I を流すと磁束 φ ウエーバを生じ、I と φ の関係は以下で表される。

 $N\phi = LI$ (2.23)

この比例定数Lをインダクタンスと呼ぶ。

ー巻きのインダクタンスを Lo、電流 I を流したときの磁束を ϕ o とすると、

 $\phi_o = L_o I \quad (2.24)$

図 2.15 インダクタの電圧・電流特性

巻数がNになると磁束はN倍になる。したがって、

 $\phi = N\phi_o = NL_oI (2.25)$

 $\therefore LI = N\phi = N^2\phi_o = N^2L_oI \quad (2.26)$

となり、インダクタンスLは巻数の2乗に比例する。 インダクタにおいては磁束が変化すると次のように巻数に比例して電圧が生じる。

$$V(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.27)$$

レンツの法則により磁束の変化を妨げる方向に電圧が出る。式(2.23)と(2.27)より、



$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} (2.28)$$

となり、電流の時間変化にインダクタンスを掛け たものが発生電圧となる。

逆に電圧 V(t)を印加したときの電流は、



図 2.16 鎖交磁束数不変則

$$I(t) = \frac{1}{L} \left[\int_{t_0}^t V(t) dt + \phi_0 \right]$$
 (2.29)

となる。

(2) 鎖交磁束数不変則

図 2.16 においてはじめにスイッチ S が閉じられており一定電流 I₁ が流れている。このと きの電流 I₁ は、

$$I_1 = \frac{V_0}{R_1}$$
 (2.30)

である。次にスイッチSを開き、充分永い時間が経過したあとの電流 I1"は

$$I_1'' = \frac{V_0}{R_1 + R_2} \quad (2.31)$$

である。ではスイッチを開いた瞬間の電流はどうなるであろか。鎖交磁束数不変則によれ ば、スイッチを開いた前後の2つのインダクタの鎖交磁束数は不変なので、

 $I_1L_1 + 0 \cdot L_2 = I_1'(L_1 + L_2)$ (2.32)

$$I_{1}' = \frac{L_{1}}{\left(L_{1} + L_{2}\right)} I_{1} \quad (2.33)$$

と求められる。この様子を図 2.17 に示す。



図 2.17 インダクタの過渡特性

ところで図 2.18 に示した回路においてはじめにスイッチ S を閉じておくと、インダクタ L1, L2 に流れる電流 I1, I2 は、 S

$$I_1 = \frac{V_0}{R_1}, \ I_2 = \frac{V_0}{R_2} \ \ (2.34)$$

である。次にスイッチSを開くと、電流Iが2つのイン

ダクタに流れる。充分な時間が経過したあとの電流はゼ 図 2.18 鎖交磁束数不変則 ロになるが、スイッチを入れた瞬間の電流 I'は鎖交磁束数不変則により、電流の極性を考慮 して、

$$I_1 L_1 - I_2 L_2 = I_1' (L_1 + L_2) (2.35)$$

したがって、

$$I_1' = \frac{L_1 I_1 - L_2 I_2}{\left(L_1 + L_2\right)} (2.36)$$

と求められる。したがって2つのインダクタを流れる電流は 図 2.20 のようにスイッチSを開いた瞬間、電流が I₁'に一旦変 化してから減少することになる。

以上示したように鎖交磁束数不変則はインダクタを用いた 回路の初期状態を求める時に用いることが多い。







図 2.19 インダクタの過渡特性

2.4 微分方程式とラプラス変換

容量やインダクタを用いた回路では電圧・電流特性が微分方程式で表されるので、回路の 応答を求めるためには微分方程式を解く必要がある。ラプラス変換は時間領域の関数を複 素周波数領域の関数に変換するもので、この変換により微分方程式は代数方程式に変換さ れる。一度ラプラス変換されると時間応答のみならず周波数応答も容易に求めることがで きる。また伝達関数のポールの位置によりシステムの安定性をも判断することが可能にな る。

2.4.1 微分方程式

電気回路の基本回路素子のうち、容量とインダクタは電圧と電流の関係が単純に比例関係 にあるのではなく微分もしくは積分関係にあるため、これらの素子を含む回路の振る舞い を求めるためには微積分方程式を解く必要がある。

例えば図 2.20 に示す、抵抗と容量が直列接続された回路に電圧 V₀を加えたときの応答を 求めてみよう。

時刻0でスイッチSが閉じられたとすると、以下の方程式が成り立つ。

$$V_{0} = Ri(t) + \frac{1}{C} \left[\int_{0}^{t} i(t) dt + Q_{0} \right] (2.37)$$

このままでは解きにくいので、

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_c}{dt} \quad (2.38)$$

を用いると、式(2.37)は、

$$RC \frac{dV_c}{dt} + V_c = V_0 - \frac{Q_0}{C}$$
 (2.39)

となる。 ところで、以下のような線形微分方程式の場合、

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + A_0 y = f(t) \quad (2.40)$$



図 2.20 RC 回路

その解は右辺をゼロとしたときの解(これを基本解という)と右辺を考慮したときの解(これを特殊解という)の和になる。

基本解は

$$y = c_1 e^{h_1 t} + c_2 e^{h_2 t} + \dots + c_n e^{h_n t} \quad (2.41)$$

となり、その定数は初期条件により決定される。

特殊解は右辺の関数と同一形式の関数となり、定数、n 乗の多項式、指数関数、三角関数 などになる。

そこで、式(2.39)の基本解を

$$V_c(t) = c_1 e^{h_1 t}$$
 (2.42)

と置き、これを式(2.39)に代入して

$$(RCh_1 + 1)c_1e^{h_1t} = 0 \quad (2.43)$$

一般解はこれに定数Aを加えたものであるので、

$$V_c(t) = c_1 e^{-\frac{t}{RC}} + A$$
 (2.45)

が成り立ち、t=0において
$$V_c=rac{Q_0}{C},\ t=\infty$$
にて $V_c=V_0$ なので、

$$V_{c}(t) = V_{0}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + \frac{Q_{0}}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.46)$$

となる。

2.4.2 ラプラス変換

電気回路は基本的に微積分方程式で表されるので、時間的な振る舞いを解析するには微積 分方程式を解けば良いのであるが、複雑な回路において初期値を考慮しながら解くのは大 変困難である。しかしながら幸いなことにラプラス変換を用いれば微積分方程式を簡単な 代数方程式に変換してよりシステマティックに解くことができる。 連続時間信号 f(t)のラプラス変換 F(s)は、

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (2.47)$$

で与えられる。ここでsは複素数である。(2.47)式が成立するsの範囲を収束領域という。
例 $f(t) = e^{-bt}u(t) \leftrightarrow F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+b)t}dt$
の場合は $F(s) = -\frac{1}{s+b}e^{-(s+b)t} \begin{vmatrix} t = \infty \\ t = 0 \end{vmatrix}$ を評価する必要がある。
ここで $s = \sigma + j\omega$ と置くと、 $\lim_{t \to \infty} e^{-(\sigma+b+j\omega)t}$ であるから $\sigma + b > 0$ であればこの極

限は 0 となるので、
$$F(s) = \frac{1}{s+b}$$
となる。この場合の収束領域は Re(s)>-b である。

多くの応用において少なくとも収束領域が存在すれば問題は生じない。

代表的な関数に対するラプラス変換を求める。

(1)単位ステップ関数

単位ステップ関数 u(t)はある回路系にスイッチを閉じて一定電圧を加える場合などに用いられる。(3.1.1)式を用いて

$$F(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right) + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \quad (2.48)$$

ここで、 $\operatorname{Re}(s)>0$ としている。したがって 単位ステップ関数 u(t)のラプラス変換対は $u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$

となる。

(2)単位インパルス関数

単位インパルス関数はシステムの固有な性質を表すシステム関数を求める場合などに用いられる。単位インパルス関数は

$$\delta(t) = \begin{cases} 1; t = 0\\ 0; t \neq 0 \end{cases}$$
従って、 $F(s) = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = \delta(0) e^{-s \cdot 0} = \delta(0) = 1$ (2.49)

ラプラス変換対は

 $\delta(t) \Leftrightarrow 1$

(3)指数関数的波形

指数関数的波形は eat と表される。ラプラス変換は、

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (2.50)$$

ラプラス変換対は

$$e^{at} \Leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

である。

(4) 正弦波·余弦波

指数関数が求められたのでこれを用いて正弦波・余弦波の変換を求めてみる。

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$
 $\sigma = cos \omega t \pm j \sin \omega t$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

ラプラス変換
$$L[\cos\omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$
 (2.51)

同様に
$$L[\sin\omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$
 (2.52)

ラプラス変換対は

 $\cos \omega t \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, $\sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

(5)時間をずらした波形

ある時間波形 f(t)=g(t)u(t)を時間 T 遅らせたときの波形を k(t)とすると k(t) = g(t-T)u(t-T) となる。従ってラプラス変換は、

$$K(s) = \int_0^\infty g(t-T)u(t-T)e^{-st}dt = \int_T^\infty g(t-T)u(t-T)e^{-st}dt \Theta u(t-T) = 0, \text{ when } t < T$$

 $\tau = t - T$ の変換により、

$$= \int_{0}^{\infty} g(\tau) u(\tau) e^{-s(\tau+T)} d\tau = e^{-sT} \int_{0}^{\infty} g(\tau) u(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} \int_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s) \quad (2.53)$$

したがって時間を T 遅らせるという時間 領域での処理はラプラス変換では波形 f(t)の ラプラス変換に e^{-sT}をかけることに相当する。

$$t \rightarrow t - T \Leftrightarrow e^{-sT}$$
をかける

この演算はアナログ信号(時間連続)とディ ジタル信号(時間離散)の橋渡しをする上で 重要である。

図 2.21 に代表的な関数のラプラス変換を まとめる。

(6) 微分

微分演算のラプラス変換は部分積分の公式よ り

インパルス	$\delta(t)$	1
ステップ	u(t)	1
ランプ	t	$\frac{s}{\frac{1}{s^2}}$
指数	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\left(s+\alpha\right)^2}$
サイン	sin <i>wt</i>	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
コサイン	cos @t	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
	$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

図 2.21 代表的な関数のラプラス変換

部分積分の公式

$$\int f(x)dx = F(x) とすると$$

$$\int f(x) \cdot g(x)dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)dx$$

$$K(s) = \int_{0}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_{0}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt} (e^{-st}) dt = \liminf_{t \to \infty} (f(t) e^{-st}) - f(0) - \int_{0}^{\infty} f(t) (-s\bar{e}^{-st}) dt$$

したがって、
$$K(s) = -f(0) + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$
 (2.54)

ここで、f(0)とは t=0 における f の値で、初期値と呼ばれる。したがってラプラス変換対は、

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

その他2次・3次の微分は、

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\frac{d^{3}f(t)}{dt^{3}} \Leftrightarrow s^{3}F(s) - s^{2}f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

となる。

一般的な n 次微分は

$$\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}} \Leftrightarrow s^{n}F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (2.55)$$

で表される。

(7)積分 積分演算は、

$$K(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-st} dt$$
 部分積分の公式を適用して、

$$= -\frac{e^{-st}}{s} \int_{0}^{t} f(t)dt \Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \frac{q(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \quad \text{if } q(0) \equiv \left[\int^{t} f(t)dt\right]_{t=0} \quad (2.56)$$

ラプラス変換対は

$$\int_0^t f(t)dt \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{q(0)}{s}$$

となる。

2.4.3 ラプラス逆変換

ラプラス変換して得られた複素周波数領域の関数 F(s)を実時間の関数 f(t)に変換するのが ラプラス逆変換で、理論的にはラプラス逆変換は複素積分 $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$ で 与えられるが、実際的には部分分数展開を用いて求められる。s による関数は以下のように 分子・分母に多項式を持つ関数で書き表せる。

$$N(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad (2.57)$$

従って、ziを分子の多項式の根(これをゼロと呼ぶ)、pjを分母の多項式の根(これをポ ールと呼ぶ)とすると上式は、

$$N(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)} \quad (2.58)$$

と表される。ここで、H は係数である。このポールとゼロはシステムの特性を表す重要な 概念である。

ヘビサイドの展開定理より、これは以下のように展開できることが分かっている。

$$N(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} ;$$

$$K_i = [(s - s_i) \cdot N(s)]_{s=s_i}, i=0,1, 2,.., n$$
 (2.59)

ここで、Kiは留数と呼ばれる。したがって、ラプラス逆変換は、

$$x(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}, \quad t \ge 0$$

となる。

重根を持つ場合は厄介で、r個の重根とn-r個の単極を持つ場合は

$$N(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{K_r}{(s - p_1)^r} + \frac{K_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$
(2.60)

単極の留数は(2.59)と同様であるが、多重極の留数 Krは

$$K_{r} = \left[(s - p_{1})^{r} N(s) \right]_{s=p_{1}}$$

$$K_{r-i} = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^{i}}{ds^{i}} \left\{ (s - p_{i})^{r} N(s) \right\} \right]_{s=p_{1}}, \quad i = 1, 2, ..., r - 1$$
(2.61)

より求まり、逆ラプラス変換は、

$$f(t) = \left\{ K_1 + K_2 \frac{t}{1!} + \dots + K_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right\} e^{p_1 t} + K_{r+1} e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \quad (2.62)$$

$$\geq f_2 \not \supset_{\circ}$$

これでは分かりにくいので例を挙げる。

問題:
$$F(s) = \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)}$$
 をラプラス逆変換せよ

答え:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s-1} + \frac{K_{12}}{(s-1)^2} + \frac{K_3}{(s+2)} \quad \textit{と展開できる。各係数を求め、ラプラス逆変換する。
$$K_{12} = (s-1)^2 \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \bigg|_{s=1} = \frac{11}{3}$$

$$K_{11} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \bigg\{ (s-1)^2 \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \bigg\} \bigg|_{s=1} = \frac{25}{9}$$

$$K_2 = (s+2) \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \bigg|_{s=-2} = \frac{20}{9}$$

$$\therefore f(t) = \frac{25}{9} e^t + \frac{11}{3} te^t + \frac{20}{9} e^{-2t}$$$$

簡単な重根でもかなり複雑な計算となる。

2.4.4 微分方程式への応用n 階線形微分方程式は、

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = x(t)$$

であるので、式(2.55)を用いて両辺のラプラス変換をとると、

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \left\{ s^k Y(s) - \sum_{r=1}^{k} s^{k-r} y^{(r-1)}(0) \right\} = X(s) \quad (2.63)$$

$$\begin{split} & \geq \frac{1}{k} \mathcal{Z}_{\circ} \quad z = \mathcal{T}_{\circ} \\ & \sum_{k=0}^{n} b_{k} s^{k} = B(s) \quad (2.64a) \\ & \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=1}^{k} b_{k} y^{(r-1)}(0) s^{k-r} = C(s) \quad (2.64b) \end{split}$$

とおくと、(2.63)式は

B(s)Y(s) = X(s) + C(s) (2.65)

なので、

$$Y(s) = \frac{X(s)}{B(s)} + \frac{C(s)}{B(s)}$$
 (2.66)

したがって(2.63)式の微分方程式の解は(2.66)式のラプラス逆変換として求めることができる。

L¹をラプラス逆変換とすると、

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{X(s)}{B(s)}\right] + L^{-1}\left[\frac{C(s)}{B(s)}\right]$$
(2.67)

この逆変換は(2.58)に示したヘビサイドの展開定理によって求めることができるが、その際

B(s)=0

なる方程式の根を求めることが必要である。微分方程式の解の性質はこの方程式の根によって支配され、この方程式は特性方程式と呼ばれる。

2.4.4 各素子のラプラス表記

電気回路が微積分方程式で記述され、それを解くにはラプラス変換を用いることで初期値 を組み込んで解ける。そこで、各素子の初期値を考慮したラプラス表記を示す。

1) 抵抗

抵抗は簡単であり、図 2.22 に示すように、

$$V(s) = RI(s)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{R} = GV(s)$$
 (2.68)

である。



$$\frac{R}{R} = \frac{GV(S)}{R}$$



2)容量

容量の端子間電圧 Vc は流れる電流 ic に対して

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_c(t) dt$$
したがって、これをラプラス変換すると、

$$V_{c}(s) = \frac{1}{C} \left[\frac{I_{c}(s)}{s} + \frac{q(0)}{s} \right] = \frac{1}{C} \frac{I_{c}(s)}{s} + \frac{V(0)}{s} \quad (2.69)$$

ここで、q(o)は初期電荷である。微分型では

$$I_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}$$

これをラプラス変換し、

$$I_{c}(s) = C[sV_{c}(s) + V_{c}(0)] \quad (2.70)$$

したがって、容量は図 2.23 に示すような回路で表される。



図 2.23 容量の表記

3)インダクタ

インダクタに発生する電圧 Vc は流れる電流に対して、

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}$$

これより、

$$V_L(s) = L[sI_L(s) + I_L(0)]$$
 (2.71)

また、
$$I_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(t) dt$$

したがって、
$$I_L(s) = \frac{1}{L} \frac{V_L(s)}{s} + \frac{I_L(0)}{s}$$
 (2.72)

となり、図 2.24 に示すような回路で表される。





図 2.24 インダクタの表記

以上の表記法を用いて初期値を考慮した回路網方程式を解いてみよう。

図 2.25 において容量 C₁は最初電圧 V₀で充電されており、容量 C₂は完全に放電されて初 期電荷が無いものとする。スイッチを閉じたときの電圧を求める。

回路方程式は

$$V(s)\left(\frac{1}{R}+sC_1+sC_2\right)=C_1V_0$$



これより、

図 2.25 容量と抵抗による回路

$$V(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{R(C_1 + C_2)}} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0$$

ラプラス逆変換により、

$$V(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_o e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}$$

したがって、スイッチを閉じた瞬間に初期電圧は容量分配され、電圧は次第にゼロになる。

2.5 回路網方程式の解き方

抵抗、容量、インダクタなどの複数の素子が接続された回路を回路網と言い、この回路の 電圧や電流を求める必要があるが、この回路網は以下の法則に従う。

2.5.1 キルヒホッフの法則

回路網の電圧もしくは電流を求めるにはキルヒホッフの第1法則および第2法則を用いる。

a) キルヒホッフの第1法則

図 2.26 のように任意のノードに流入する電流の和はゼロである。つまり流れ込んだ電流 量は流れ出る電流量に等しい。これは物質不滅の法則を表しており、数学的には

div J = 0

と表される。

 I_1 Node I_3

キルヒホッフの第2法則

図 2.26 キルヒホッフの第1法則 図 2.27 のように、ある経路に沿った電圧の和はゼロである。つまりノード間の電圧差は どの経路を取っても等しい。これはポテンシャル1価を表し、数学的には、

rot V = 0

を表している。

図 2.28 のような回路網では、キルヒホッフの第1法則に より以下の式が成り立つ。



図 2.27 キルヒホッフの第2法則

Nod $\mathcal{A}V_1: Y_1(V_1 - V_s) + Y_2V_1 + Y_3(V_1 - V_2) = O_{(2.73)}$ $Node N_2: Y_3(V_2 - V_1) + I_s + Y_4 V_2 = 0$

以上の式を各ノード電圧でまとめて、

 $(Y_1 + Y_2 + Y_3)V_1 - Y_3V_2 = Y_1V_s$ $- Y_3V_1 + (Y_3 + Y_4)V_2 = -I_s$ (2.74)





$$V_{1} = \frac{(Y_{3} + Y_{4})Y_{1}V_{s} - Y_{3}I_{s}}{Y_{3}(Y_{1} + Y_{2}) + Y_{4}(Y_{1} + Y_{2} + Y_{3})}$$

$$V_{2} = \frac{Y_{1}Y_{3}V_{s} - (Y_{1} + Y_{2} + Y_{3})I_{s}}{Y_{3}(Y_{1} + Y_{2}) + Y_{4}(Y_{1} + Y_{2} + Y_{3})}$$
(2.75)

となる。

一般に電子回路網を特には回路網を接点電位とアドミッタンスで表した方が解き易い。接 点の方が任意性の強いループよりも明快で、頻繁に用いられる容量が分数式にならないか らである。

一般的には、接点電位、アドミッタンス行列、電流源を用いて、

$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \end{pmatrix}$	=	(Y ₁₁ Y ₂₁	Y_{12} Y_{22}	Y_{1n}	$egin{pmatrix} V_1 \ V_2 \ \cdot \ \end{pmatrix}$	(2.76)
$\begin{pmatrix} . \\ I_n \end{pmatrix}$		<i>Y</i> _{<i>n</i>1}		Y _{nn})	\cdot $\langle V_n angle$	

と表すことができ、この行列式の解は、クラメールの法則を用いて、以下のようになる。

$$V_{1} = \frac{\Delta_{1}}{\Delta} = \frac{\begin{pmatrix} I_{1} & Y_{12} & & Y_{1n} \\ I_{2} & Y_{22} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ I_{n} & & & Y_{nn} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & & & \\ & & & & \\ Y_{n1} & & & Y_{nn} \end{pmatrix}} (2.77)$$

2.6 回路の時間応答と安定性

回路のインピーダンスやアドミッタンス、伝達関数などを複素周波数 s で表したものをシ ステム関数という。このシステム関数より回路の時間応答や安定性が分かる。

2.6.1 システム関数とインパルス応答

入力信号 x(t)をラプラス変換したものを X(s)、出力信号 y(t)をラプラス変換したものを Y(s)で表すと、

 $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ (2.78)

で表されるとき、H(s)をシステム関数という。

$$H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad (2.79)$$

また以下のように表される。

$$H(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)}$$
(2.80)

で表すことができるので、システムのインパルス応答はその極の位置により以下のように 分類される。

実の単極: $p \rightarrow Ke^{pt}$ (2.81a)

複素極: $\sigma \pm j\omega \rightarrow Ke^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$ (2.81b)

多重極: $p \rightarrow Kt^i e^{pt}$, $Kt^i e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$

(2.81c)

図 2.29 に示すようにシステムの応答は極の位置 により決まる。

2.6.2 システムの安定性



図 2.29 極の位置とシステム応答

したがってシステムの振る舞いは以下のように安定、準安定、不安定と分類でき、システムを解析する上で重要な特性を与える。

安定: $h(t) \rightarrow O(t \rightarrow \infty) \Rightarrow Re(p_i) < 0, i = 1,2,...,m$ (2.82a) 準安定: $|h(t)| \le K, (0 \le t < \infty) \Rightarrow$ 単極 $Re(p) \le 0,$ 多重極 Re(p) < O (2.82b) 不安定: $|h(t)| \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty) \Rightarrow$ 少くとも一つの単極 Re(p) > 0, 多重極 $Re(p) \ge 0$ (2.82c)

例:LCR回路

図 2.30 の LCR 回路において入力を印加電圧、出力を回路を流れる電流とすれば、システ ム関数 H(s)は



図 2.30 LCR 回路

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^{2} + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.83)$$

$$\xi t_{x} y$$
, $p_{1}, p_{2} = -\frac{1}{2L} \left(R \pm \sqrt{R^{2} - 4\frac{L}{C}} \right)$ (2.84)

であるので、平方根の中が負であれば $(R < 2\sqrt{\frac{L}{C}})$ 複素極となり、その実数部は負であるので、波形は振動的であるが減衰して行き安定である。もしも平方根の中が正である場合

でも
$$R - \sqrt{R^2 - 4rac{L}{C}} > 0$$
 が成り立つのでシステムは安定である。

ところで、系の安定性は以下に示す最終値定理を用いて検討することも可能である。

最終値定理: L(f'(t)) = sF(s) - f(0) であるので、

$$\lim_{s \to 0} \left\{ \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \right\} = \lim_{s \to 0} \left\{ sF(s) - f(0) \right\}$$
(2.85)

この左辺
$$\lim_{s\to 0} \left\{ \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \right\} = \int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t\to\infty} \left\{ f(t) - f(0) \right\}$$

したがって、
$$\lim_{s \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$
 (2.86)

この定理を(5.2.2)式に用いると sH(s)はゼロになることからこの系は安定であることが分かる。

これと対になる定理が初期値定理である。これも便利なので覚えておこう。

初期値定理:

L(f'(t)) = sF(s) - f(0)なので、

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt\right\} = \lim_{s\to\infty}\left\{sF(s) - f(0)\right\}$$

左辺はゼロになるので、

$$f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$
(2.87)

2.6.2 インディシャル応答

自動制御や負帰還回路はステップ波に対しての応答が重要である。この応答を単位ステップ応答もしくはインディシャル応答という。



(1)1次遅れの系のインディシャル応答
 入力信号 x(t)と出力信号 y(t)の関係が、

$$b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_0 x(t) \quad (b_1, b_0 > 0) \quad (2.88)$$

と表される系を1次遅れの系といい、H(s)は

$$H(s) = \frac{K}{1+Ts} \ (K = \frac{a_0}{b_0}, \ T = \frac{b_1}{b_0}) \quad (2.89)$$

で表される。例えば図 2.31 に示す RC 積分回路が 1 次遅れの系である。 このインディシャル応答は

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{h(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K}{s(1+Ts)}\right\} = K\left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right) (2.90)$$

となる。この応答を図 2.31 に示す。

Tは応答の速さを表すパラメータで、時定数と呼ばれる。応答波形の時間ゼロでの勾配を そのまま延長して最終値と交わる時間が時定数を与えている。このときの応答波形は最終 値の 1-1/e=0.63 になる。

(2) 2次の遅れの系のインディシャル応答入力信号 x(t)と出力信号 y(t)の関係が、

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_0 x(t) \quad (b_2, b_1, b_0 > 0) \quad (2.91)$$

と表される系を2次遅れの系といい、H(s)は

$$H(s) = \frac{a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{K}{1 + 2\zeta T s + T^2 s^2} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.92)$$

なる標準形式で表される。ここで、

$$(K = \frac{a_0}{b_0}, T^2 = \frac{b_2}{b_0}, 2\zeta T = \frac{b_1}{b_0}, \omega_n = \frac{1}{T})$$

である。ここで ζ は減衰係数 (damping coefficient) ω_n は固有角周波数(natural angular frequency)と呼ばれる。例えば図 2.30 に示した LRC 回路が 2 次遅れの系である。

この回路では、
$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, T = \sqrt{LC}, \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
である。

このインディシャル応答を求める。

特性方程式は $s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$ であるから、根は $p_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n$ (2.93)

インディシャル応答は

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} \right\} (2.94)$$

で表されるラプラス逆変換として求められる。展開定理より ζ の値に応じて以下のようになる。

(a)
$$\zeta > 1$$
 (過制動) (p_1, p_2 は相異なる実根)

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \frac{\sinh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t + \gamma\right)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (2.95)$$
$$\hbar z \hbar \zeta \cup, \quad \gamma = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}$$

(b) ζ=1 (臨界制動) (p₁, p₂は重根)

$$y(t) = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$
 (2.96)

(c) ζ <1 (不足制動) (p1, p2 は複素共役根)

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \frac{\sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \varphi\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.97)$$
$$\hbar \tau \tau \zeta \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}$$

図 2.34 に $\omega_n t$ を横軸に取り、 ζ をパラメータとしたときの応答波形を示す。

*ζ*の値が小さいと波形は振動的になり収束しにくくなる。一方、大きすぎると応答が遅く 収束に時間がかかる。したがって*ζ*はシステムの設計にあたっての重要なパラメータであ る。





2.7 システムの周波数特性

システムの解析においては時間応答だけでなく周波数応答も重要である。例えば信号に雑 音や妨害信号が混じっている場合、必要な信号のみを取り出し、雑音や妨害信号はできる だけ減衰させたい場合が多い。このような操作をフィルターという。また最終的には時間 応答を求めたいばあいでもシステムの特性に強い周波数依存があり、微分方程式では表現 しにくい場合や、そのシステム特性の周波数領域での測定が容易な場合は、入力信号をフ ーリエ級数やフーリエ変換を用いて周波数領域で記述し、それぞれの周波数でのシステム の応答を求め、フーリエ逆変換などを用いて時間領域応答に変換することもよく行なわれ ている。そこでここではシステムの周波数特性について説明する。

2.7.1 ポールとゼロおよびシステムの周波数特性

先にシステムはラプラス変換を用いることで以下のようにポール Piおよびゼロ Ziで表すことができる。

$$H(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)}$$
(2.98)

正弦波の定常応答は $s = \sigma + j\omega$ において $\sigma = 0$ の場合であるので、式(2.98)に $s = j\omega$ を 代入することで求められる。したがって、

$$H(j\omega) = H \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\cdots(j\omega - z_n)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - p_m)}$$
(2.99)

と表現できる。ポール Piおよびゼロ Ziは複素数であり、これを極形式に変換すると、



図 2.35 RC 積分・微分回路とポール・ゼロの位置

 $j\omega - S_r = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ (2.100)

となる。ここで Sr はポール Pi、もしくはゼロ Zi を一般的に表している。 ポールとゼロの位置は例えば RC 積分回路や RC 微分回路では図 2.35 のようになる。

ポールはともに実軸上の $-\frac{1}{RC}$ であり、RC 微分回路ではゼロ点を持ち、その値はゼロで

ある。



図 6.36 RC 積分・微分回路の M と位相

この状態で大きさ $M(\omega)$ と位相 $\phi(\omega)$ を求めると、図 2.36 に示したように

 $\vec{\pi} - \nu, -\frac{1}{RC} \vec{\nabla} k \vec{1},$ $M_{p}(\omega) = \sqrt{\omega^{2} + \left(\frac{1}{RC}\right)^{2}} \qquad (2.101a)$

$$\phi_p(\omega) = \tan^{-1} \omega RC \qquad (2.101b)$$

ゼロにおいては

 $M_z(\omega) = \omega$ (2.102a)

$$\phi_z(\omega) = \frac{\pi}{2} \qquad (2.102b)$$

である。大きさ M は各ポールやゼロ点から虚軸上の角周波数までの長さであり、位相は 実軸をゼロとした基準からの角度であることが分かる。 式(2.100)を用いることで式(2.99)式は以下のように記述できる。

$$H(j\omega) = H \frac{M_{z1} \cdot M_{z2} \cdots M_{zn}}{M_{p1} \cdot M_{p2} \cdots M_{pm}} e^{j(\phi_{z1} + \phi_{z2} + \dots + \phi_{zn} - \phi_{p1} - \phi_{p2} - \dots - \phi_{pm})}$$
(2.103)

つまり、大きさは各ゼロからの大きさを掛けて、各ポールからの大きさで割ったものであ り、位相は各ゼロからの位相を足して、各ポールからの位相で引いたものである。

したがって、RC 積分回路の場合の周波数特性は

$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$
(2.104a)
$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega RC = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$
(2.104b)

$$\sub{c}, \ \omega_c = \frac{1}{RC} \ c \ b \ \delta_o$$

同様に RC 微分回路の場合は、

$$H(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$
(2.105a)

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \omega RC = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \qquad (2.105b)$$

となる。RC 積分回路の場合は周波数ゼロで大きさが 1 、位相が 0 度。周波数無限大で大きさがゼロ、位相が- $\pi/2$ (-90 度)。 $\omega = \omega_c$ にて大きさが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、位相が- $\pi/4$ (-45 度)になる。

一方 RC 微分回路では周波数ゼロで大きさが 0、位相が 90 度。周波数無限大で大きさが 1、 位相がゼロ度。 $\omega = \omega_c$ にて大きさが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、位相が $\pi/4$ (45 度)になる。 図 6.37 に示す RCL からなる 2 次の系ではポールが複素数になり、やや複雑な応答を示す。 この回路に交流信号電圧を加えたときに流れる電流はインピーダンスからアドミッタンス に変換して以下のようになる。

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} + sL$$

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{L} \left(\frac{s}{(s - p_a)(s - p_a^*)} \right)$$
(2.106)

$$p_a, p_a^* = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

9

ここで、 $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ である。これらはそれぞれ共 図 2.37 RCL 回路 振角周波数、ダンピングファクターと呼ばれる。大きさと位相は、

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \ \phi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$
(2.107)

で与えられる。この回路の電流は周波数ゼロでゼロ、無限大でもゼロ、共振角周波数で 1/R になる。位相は周波数ゼロで 90 度、無限大で-90 度、共振角周波数で 0 度になる。 図 2.38 にポールとゼロに位置、図 2.39 に周波数特性を示す。



図 2.38 2次の系のポールとゼロ



図 2.39 2次の系の周波数特性

このような2次の系においては共振特性を用いて特定の周波数の信号だけを通過させた り、遮断したりすることができるためフィルターとして広く利用されている。

ところで、この周波数選択の鋭さを表すものとして Q が用いられることが多い。共振周 波数近傍にて電力の半分を通過させる周波数を周波数帯域幅Δωとすると

$$\Delta \omega = \frac{\omega_n}{Q} \qquad (2.108)$$

となり、Q 高いほど鋭い周波数選択特性が得られる。Q はダンピングファクターなどと以下の関係がある。

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega_n L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \qquad (2.109)$$

したがって Q を高くするには基本的に抵抗を下げなければならない。また図 2.40 に示し たように周波数帯域幅Δωはポールと虚軸間の距離が短いほど高くなる。 2.7.2 ボーデ図と骨格ボーデ図

1) ボーデ図

周波数特性をより分かりやすく表現したのがボーデ図(Bode Diagrams)である。 周波数特性を表す(6.1.6)式を再び示す。

$$H(j\omega) = H \frac{M_{z1} \cdot M_{z2} \cdots M_{zn}}{M_{p1} \cdot M_{p2} \cdots M_{pm}} e^{j(\phi_{z1} + \phi_{z2} + \dots + \phi_{zn} - \phi_{p1} - \phi_{p2} - \dots - \phi_{pm})} (2.110)$$

この式に対数変換を施し、利得と位相特性に分けると、

利得:
$$20\log|H(\omega)| = 20\log H + 20\sum_{i=1}^{n}\log|M_{zi}| - 20\sum_{i=1}^{m}\log|M_{pi}|$$
 (2.111a)

位相:
$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_{zi} - \sum_{i=1}^{m} \phi_{pi}$$
 (2.111b)

となって、利得も位相もゼロとポールに関する利得と位相の加減算で表される。

2) 骨格ボーデ図

ポールやゼロが実数の場合は(5.1.2)式に示した周波数特性は $-z_n = \omega_{zn}, -p_m = \omega_{pn}$ を用いて以下のように書き換えることができる。

$$H(j\omega) = H \frac{(j\omega - \mathbf{z}_1)(j\omega - \mathbf{z}_2)\cdots(j\omega - \mathbf{z}_n)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - p_m)} = G \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{z1}}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{z2}}\right)\cdots\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{zn}}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{p2}}\right)\cdots\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{pm}}\right)}$$
(2.112)

対数変換を施すと、

利得:
$$20\log|H(\omega)| = 20\log G + 20\sum_{i=1}^{n}\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{zi}}\right| - 20\sum_{i=1}^{m}\log\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right|$$
 (2.113a)

位相:
$$\phi = 57.3 \left(\sum_{i=1}^{n} \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_{zi}} - \sum_{i=1}^{m} \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_{pi}} \right)$$
 (2.114b)

ここで、利得は、

$$20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_i}\right| = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right) \qquad (2.115)$$

で表されるため、以下のように近似できる。

$$20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{i}}\right| = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_{i}}\right)^{2}\right) = 0dB \ (\omega \ll \omega_{i})$$

$$= 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_{i}}\right) \ (\omega \gg \omega_{i})$$
(2.116)



図 2.40 骨格ボーデ図の作成方法

位相はやや複雑であるが、ゼロの場合は $\omega = \omega_i$ で45度、 $\omega = 0.1\omega_i$ で0度、 $\omega = 10\omega_i$ で90度で直線近似し、ポールの場合は $\omega = \omega_i$ で45度、 $\omega = 0.1\omega_i$ で0度、 $\omega = 10\omega_i$ で90

度で直線近似することが良く行われている。図 2.40 にこの様子を示す。

図 2.41 に RC 積分回路と RC 微分回路の利得と位相のボーデ図を示す。ただし、回路の 利得を 10 倍にしている。

また微分回路で初期位相が90度になっているのは原点にできるゼロのためである。

骨格ボーデ図による近似も併せて示した。利得は良い近時を与えるが位相はかなりずれが 大きく、おおよその見積もりを与えるものであることに注意が必要である。



図 2.41a RC 積分回路のボーデ図

