

第3回 複素関数の微分, コーシー・リーマンの関係式

4月30日(木)

【学習範囲】『理工系のための解く！複素解析』第2章2.5～2.7, 第3章3.1～3.3
(pp.56～83)
詳細は本を参照のこと。

③ 双曲線関数

指数関数表示

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$



分母に j がないことに注意！

双曲線関数の方程式の解法

指数関数表示を用い、 e^z を求めた後に①と同様の方法で解を求める。

④ 対数関数

$$\begin{aligned}\log z &= \log \left[r e^{j(\theta+2n\pi)} \right] \\ &= \log r + j(\theta + 2n\pi)\end{aligned}$$



複数の解を持つ多価関数

(ただし n は整数)

$n=0$ のときの値を主値と呼び、 $\text{Log}z$ と表記する。

$$\log z = \text{Log}z + j2n\pi$$

⑤ ベキ関数

$$\begin{aligned}z^c &= (r e^{j(\theta+2n\pi)})^{a+jb} \\ &= e^{j(\theta+2n\pi)(a+jb)} r^{a+jb} \\ &= e^{j(a\theta+2na\pi)} e^{jb \log r} r^a e^{-b(\theta+2n\pi)} \\ &= r^a e^{-b(\theta+2n\pi)} [\cos(a\theta + b \log r) + j \sin(a\theta + b \log r)]\end{aligned}$$

$n=0$ のときの値を主値と呼ぶ。

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。

2. 複素関数の微分, コーシー・リーマンの関係式, 調和関数

● 正則関数

複素平面上の点 z_0 およびその近傍で $f(z)$ が微分可能のとき、 $f(z)$ は点 z_0 で正則であるといい、 $f(z)$ を正則関数という。

$f(z)$ がある点で正則でないとき、その点を特異点という。

導関数
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$



複素平面上のあらゆる方向からの極限值が確定する必要あり

● よく使う微分公式

(1) $f(z)$ が正則で、 k が複素定数ならば、

$$k' = 0$$

$$\{kf(z)\}' = kf'(z)$$

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

(n は整数。実数でも成り立つ。)

(2) $f(z), g(z)$ が正則ならば

$$\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z)$$

$$\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2} \quad (\text{ただし } g(z) \neq 0)$$

(3) $f(z)$ と $g(z)$ の合成関数 $f(g(z))$ があり、すべてが正則ならば

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dz} = f'(g(z))g'(z)$$

(4) $w = f(z)$ ならば、

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw}$$

$z = f(t), w = g(t)$ ならば、

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(5) $f(z), g(z)$ が $z = z_0$ で正則で、 $f(z_0) = g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$ ならば

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

ド・ロピタルの公式

● コーシー・リーマンの関係式

複素関数 $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ において $u(x, y), v(x, y)$ が連続な偏導関数を持つ場合、 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

※ この関係式を満足しても特異点を持つ場合はその点で正則でない。

正則関数の微分は以下で与えられる。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

学習範囲の内容をしっかりと身につけるため、本の問題を解いてみよう。