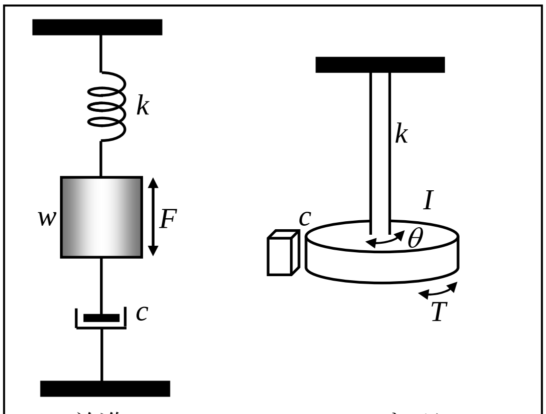
２階線形微分方程式と機械振動・回路解析

- 機械系と電気系の方程式
- 放電回路と充電回路

2階線形微分方程式　機械系



(a)　並進　　　(b)ねじり

(a)並進

おもりの平行位置からの変位 y（上が正），バネ定数 k，重さ w，重力加速度 g，摩擦係数 c

弾性力 $k\left(\dfrac{w}{k}-y\right)=w-ky$，

重さで伸びた長さ－変位

摩擦力 $-c\dfrac{dy}{dt}$，外力 $F_0\cos\omega t$，重力 $-w$

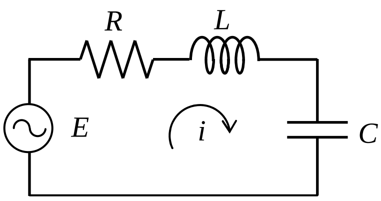
$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=-w+k\left(\frac{w}{k}-y\right)-c\frac{dy}{dt}+F_0\cos\omega t$$

よって，$\dfrac{w}{g}\dfrac{d^2y}{dt^2}+c\dfrac{dy}{dt}+ky=F_0\cos\omega t\quad\cdots(1)$

(b)ねじり

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\frac{d\theta}{dt}+k\theta=T_0\cos\omega t\quad\cdots(2)$$

電気系（直列）キルヒホッフの第二法則



回路素子電圧：インダクタ：$L\dfrac{di}{dt}$，　抵抗：Ri，

コンデンサ：$\dfrac{1}{C}\int^t i\,dt$，電源：$E=E_0\cos\omega t$，

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int^t i\,dt=E_0\cos\omega t\quad\cdots(2)$$

$Q=\int^t i\,dt$ とおくことで，

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E_0\cos\omega t\quad\cdots(3)$$

初期条件は

$$Q(0)=\int^{t=0} i\,dt=Q_0,\quad \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0}=i(0)=i_0$$

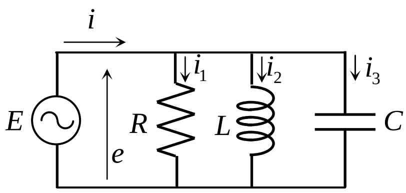
(2)を時間微分すると

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=-\omega E_0\sin\omega t\quad\cdots(4)$$

初期条件は $i(0)=i_0$，$\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0}=i'_0$

なお $\dfrac{di}{dt}=\dfrac{1}{L}\left(E_0\cos\omega t-Ri-\dfrac{1}{C}\int^t i\,dt\right)\quad\cdots(5)$

電気系（並列）キルヒホッフの第一法則



素子を流れる電流：インダクタ：$\dfrac{1}{L}\int^t e\,dt$，抵抗：$\dfrac{e}{R}$，コンデンサ：$C\dfrac{de}{dt}$　，印加電流 $I_0\cos\omega t$

$$C\frac{de}{dt}+\frac{1}{R}e+\frac{1}{L}\int^t e\,dt=I_0\cos\omega t\quad\cdots(6)$$

$U=\int^t e\,dt$ とおくことで，

$$C\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{L}=I_0\cos\omega t\quad\cdots(7)$$

初期条件は

$$U(0)=\int^{t=0} e\,dt=U_0,\quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0}=e_0$$

R

(6)を時間微分すると

$$C\frac{d^2e}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{de}{dt}+\frac{e}{L}=-\omega I_0\sin\omega t \quad \cdots(8)$$

初期条件は

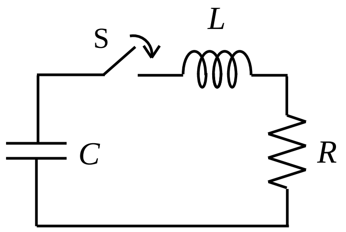
$$e(0)=e_0\,,\ \left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0}=e_0'$$

(1)(3)(4)(7)(8)は本質的に同じ

電気系と機械系の対比

並進ー機械系	直列ー電気系
質量 w/g	インダクタンス L
摩擦 c	抵抗 R
バネ定数 k	キャパシタンスの逆数 $1/C$
力 F	印加電圧 E（印加電圧の時間微分 E'）
変位 y	電荷 Q（電流 i）

RLC 回路



放電回路—１

コンデンサはスイッチを閉じる前に電圧 V_0 に充電されている（初期電荷 $Q_0=CV_0$）

(4)式より

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{CL}=0$$

特性方程式より

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}=0\,,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{CL}}\right\}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

よって根の実数部分は常に負。ルート内の符号に応じて3つに分類。$R^2 >=< 4\frac{L}{C}$

① $R^2>4\frac{L}{C}$（異なる2実根）：過制動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}=-\frac{1}{\tau}\pm\omega \quad \text{とおく}$$

$$i(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)t}$$

$$=e^{-\frac{t}{\tau}}\left(c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}\right)$$

$i(0)=e^0\left(c_1e^0+c_2e^0\right)=0$ より，$c_1=-c_2$，よって

$$i(t)=c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)=2c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$$

$$=2c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t$$

ここで，

$$\frac{di(t)}{dt}=2c_1\left(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t+e^{-\frac{t}{\tau}}\omega\cosh\omega t\right)。$$

$t=0$ での値を $L\frac{di(t)}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,dt=0$ より考えると，コンデンサの初期電圧は V_0 だから

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=2c_1\omega=\frac{1}{L}\left[-Ri-\frac{1}{C}\int^t i\,dt\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{L}\left(Ri(0)+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,dt\right)=\frac{V_0}{L}$$

よって，$c_1=\frac{V_0}{2\omega L}$ だから，

$$i=\frac{V_0}{\omega L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sinh\omega t\,,\ \omega=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

② $R^2=4\frac{L}{C}$（重根）：臨界制動

$$\lambda=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{\tau}\,,$$

$$i(t)=c_1e^{-\frac{1}{\tau}t}+c_2te^{-\frac{1}{\tau}t}=e^{-\frac{1}{\tau}t}\left(c_1+c_2t\right),$$

$i(0)=e^0\left(c_1+0\right)=0$ より，$c_1=0$，よって

$i(t)=c_2 t e^{-\frac{t}{\tau}}$。前と同様，初期条件を考えて，

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}+c_2 t\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}\left[1-\frac{t}{\tau}\right]_{t=0}=c_2=\frac{V_0}{L}$$

より，$i=\frac{V_0}{L}t\,e^{-\frac{R}{2L}t}$

③ $R^2<4\frac{L}{C}$（虚根）: 減衰振動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=\alpha\pm j\omega$$ とおくと

$$i=e^{\alpha x}(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)$$

$$=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x\right)$$

$i(0)=e^0\left(c_1+c_2\cdot 0\right)=0$ より，$c_1=0$，よって

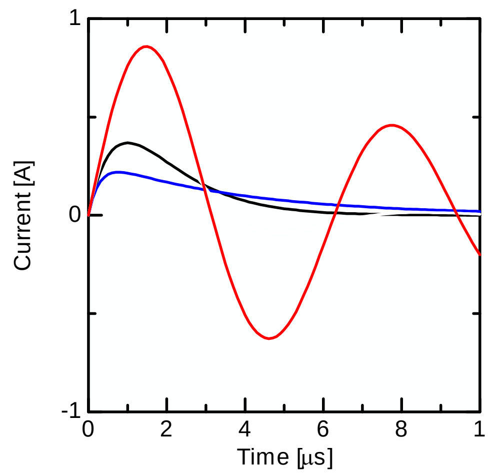
$$i(t)=c_2 e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t$$

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left[-c_2\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t+c_2 e^{-\frac{R}{2L}t}\omega\cos\omega t\right]_{t=0}$$

$$=c_2\omega=\frac{V_0}{L}$$

$c_2=\frac{V_0}{\omega L}$ より

$$i=\frac{V_0}{\omega L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t,\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



青: 過制動，黒: 臨界制動，赤: 減衰振動

充電回路　プリント参照