２階線形微分方程式の解法（整理）

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \qquad (4.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (3.1)$$

<u>定理</u>　y_1, y_2 が(3.1)の解であれば，c_1, c_2 を任意定数として，$y=c_1y_1+c_2y_2$ も解である。

<u>定理</u>　Y を(4.1)の任意の解とし，y_1, y_2 が互いに 1 次独立な(3.1)の解であれば，(4.1)の一般解は $y=c_1y_1+c_2y_2+Y$ で与えられる。

解き方のまとめ

・定係数斉次：特性方程式

・非定係数斉次：$y=x^m$ または $y=\mathrm{e}^{mx}$ として 1 つの解を求め，次に(3.9)より他方を求める。

・標準形に変換：$y=uv$ とおいて求める。

$$v=\exp\left(-\frac{1}{2}\int P(x)dx\right) \qquad (3.11)$$

・定係数非斉次：未定係数法

特殊解を $Y=AR(x)$，A は定数として(4.1)に代入し，A を決定。$R(x)=0$ とおいた時の斉次方程式の解 y_1, y_2 に $Y=AR(x)$ を加える。

$$y=c_1y_1+c_2y_2+AR(x)$$

・非定係数非斉次：定数変化法（4.1）

$R(x)=0$ とおいて求めた斉次方程式の解 y_1, y_2 の定係数 c_1, c_2 を変化させて

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$　(4.2)とし，次式から求める。

$$y=y_1\int\frac{-Ry_2}{y_1y_2'-y_1'y_2}dx+y_2\int\frac{Ry_2}{y_1y_2'-y_1'y_2}dx$$
$$+y_1C_1{}^0+y_2C_2{}^0$$

・非斉次方程式の未定係数法による解法

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \qquad (4.1)$$

基本解に加えて特殊解 Y は右辺 $R(x)$ に応じて次のように置き(4.1)に代入して求める。

$R(x)$	特殊解 Y の選択方法
a（定数）	A
$a\mathrm{e}^{rx}$	$A\mathrm{e}^{rx}$
$a\cos kx$，$a\sin kx$	$A\cos kx+B\sin kx$
ax^n（n は正整数）	$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_1x+A_0$

一般解は $y=c_1y_1+c_2y_2+Y$　となる。

第４章　２階非斉次線形微分方程式

4.1 定数変化法

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \qquad (4.1)$$

$P(x), Q(x), R(x)$ は x のある区間で連続関数

斉次方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$　(1)

の一般解は，$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$。この定数を変化させて $y=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ とおき，(4.1)を満足するように $c_1(x), c_2(x)$ を定める。

以下簡略表示して $c_1(x)$ を c_1 で表す。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc_1}{dx}y_1+c_1\frac{dy_1}{dx}+\frac{dc_2}{dx}y_2+c_2\frac{dy_2}{dx}$$

ここで，$\dfrac{dc_1}{dx}y_1+\dfrac{dc_2}{dx}y_2=0$　(2)と仮定する。

また，dy/dx を y' などと表すと

$$c_1'y_1+c_2'y_2=R \qquad (3)$$

$y=c_1y_1+c_2y_2$ より，$y'=c_1y_1'+c_2y_2'$

$$y''=c_1'y_1'+c_1y_1''+c_2'y_2'+c_2y_2''$$

これらを(4.1)に代入すると

$$c_1'y_1'+c_1y_1''+c_2'y_2'+c_2y_2''+P\left(c_1y_1'+c_2y_2'\right)$$
$$+Q\left(c_1y_1+c_2y_2\right)=R$$
$$c_1\left(y_1''+Py_1'+Qy_1\right)+c_2\left(y_2''+Py_2'+Qy_2\right)$$
$$+c_1'y_1'+c_2'y_2'=R$$

y_1, y_2 は(1)の解だから，$c_1'y_1'+c_2'y_2'=R$ …(4)

(3)(4)より，

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix},\ W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$c_1'=\frac{\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{bmatrix}}{W}=\frac{-Ry_2}{y_1y_2'-y_1'y_2} \qquad (5)$$

$$c_2'=\frac{Ry_1}{y_1y_2'-y_1'y_2} \qquad (6)$$

(5)(6)を積分して

$$c_1(x)=\int\frac{-Ry_2}{y_1y_2'-y_1'y_2}dx+C_1^0$$

$$c_2(x)=\int\frac{Ry_1}{y_1y_2'-y_1'y_2}dx+C_2^0$$

以上から非斉次微分方程式の一般解は，y_1, y_2 を基本解とすれば，

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$
$$= y_1\int\frac{-Ry_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx + y_2\int\frac{Ry_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}dx$$
$$+ y_1C_1{}^0 + y_2C_2{}^0$$

連立微分方程式：複数変数の微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = x - y & (1)\\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y & (2)\end{cases}$$

(1)より $y = -\dfrac{dx}{dt} + x$ (3)

(3)を微分

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

(3)(4)を(2)に代入

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 2x + 4\left(-\frac{dx}{dt} + x\right)$$

整理して

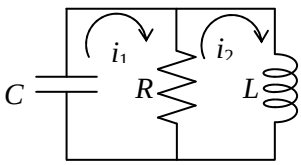
$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
$$\lambda = 2,\ 3$$

よって，$x = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$

式(3)に代入して、

$$y = -(2c_1e^{2t} + 3c_2e^{3t}) + (c_1e^{2t} + c_2e^{3t})$$
$$= -c_1e^{2t} - 2c_2e^{3t}$$

連立微分方程式の
回路例



左ループに流れる電流を i_1，右ループに流れる電流を i_2 とする。抵抗 R には i_1 と i_2 の差の電流が流れる。

左ループ: $\dfrac{1}{C}\int i_1dt + R(i_1 - i_2) = 0 \quad \cdots \quad (1)$

右ループ: $L\dfrac{di_2}{dt} + R(i_2 - i_1) = 0 \quad \cdots \quad (2)$

(2)より $\dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{R}{L}(i_2 - i_1) \quad \cdots \quad (2')$

(1)を微分，$\dfrac{1}{C}i_1 + R\left(\dfrac{di_1}{dt}{}_1 - \dfrac{di_2}{dt}\right) = 0 \cdots \quad (1')$

(2')を(1')へ代入して整理すると

$$\frac{1}{C}i_1 + R\frac{di_1}{dt}{}_1 - R\left(\frac{R}{L}i_1 - \frac{R}{L}i_2\right)$$
$$= R\frac{di_1}{dt}{}_1 + \left(\frac{1}{C} - R\frac{R}{L}\right)i_1 + \frac{R}{L}Ri_2 = 0$$

$$\begin{cases}\dfrac{di_1}{dt} = \left(\dfrac{R}{L} - \dfrac{1}{CR}\right)i_1 - \dfrac{R}{L}i_2 & (3)\\ \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{R}{L}(i_1 - i_2) & (2')\end{cases}$$

(3)から，$\dfrac{R}{L}i_2 = -\dfrac{di_1}{dt} + \left(\dfrac{R}{L} - \dfrac{1}{CR}\right)i_1 \quad \cdots(3')$

(3')を微分して

$$\frac{R}{L}\frac{di_2}{dt} = -\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{CR}\right)\frac{di_1}{dt} \quad \cdots(4)$$

(3') (4)を(2') $\dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{R}{L}i_1 - \dfrac{R}{L}i_2$ へ代入して整理すると，$\dfrac{d^2i_1}{dt^2} + \dfrac{1}{CR}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{CL}i_1 = 0$ 。

$R = 3\Omega,\ L = 4\,\mathrm{H},\ C = \dfrac{1}{12}\mathrm{F}$ として i_1，i_2 を求めよ。

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{12}{3}\frac{di_1}{dt} + \frac{12}{4}i_1 = \frac{d^2i_1}{dt^2} + 4\frac{di_1}{dt} + 3i_1 = 0$$

より

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$
$$\lambda = -1,\ -3$$

$i_1 = c_1e^{-t} + 3c_2e^{-3t}$ 　また，$i_2 = -3c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$