

第9回(プリント配付)

- RC 放電回路(電荷, 電流表記)
- RC 充電回路の解法
 - ① 直流(DC) 電源
 - ② 交流(AC) 電源
 - ③ 交流回路の定常解
- RL 充電回路の解法
 - ① 直流(DC) 電源
 - ② 交流(AC) 電源
 - ③ 交流回路の定常解

線形 1 階微分方程式の解法: RC・RL 回路

[1] 線形1階微分方程式の解の一般式の導出
[公式]

線形 1 階微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \cdots (1)$ の

一般解は式(2)で与えられる。

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \right) \cdots (2)$$

ただし c_0 は定数である。

[導出](定数変化法)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \cdots (3)$$

(3)式の $Q(x) = 0$ とおき, 解 y_0 を求める。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y,$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -P(x), \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\log|y| = -\int P(x)dx + k \quad (k \text{ は定数})$$

$$y_0(x) = k'e^{-\int P(x)dx} \quad (k' = \pm e^k)$$

次に, $y_0(x)$ を用いて元の微分方程式の解を

$y = c(x)y_0(x)$ とおけると仮定し, $c(x)$ を求める。

なお, $y = cy_0$ とおき, 式(3)に代入。

$$\frac{d(cy_0)}{dx} + P(x)cy_0 = Q(x),$$

$$\left(y_0 \frac{dc}{dx} + c \frac{dy_0}{dx} \right) + cP(x)y_0 = Q(x),$$

$$y_0 \frac{dc}{dx} + c \left(\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 \right) = Q(x)$$

ここで y_0 は $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ の解なので,

$$\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 = 0 \text{ だから, } y_0 \frac{dc}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{Q(x)}{y_0} = \frac{Q(x)}{k'e^{-\int P(x)dx}} = \frac{1}{k'} Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$c = \frac{1}{k'} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \quad (c_0 \text{ は定数})$$

$$\begin{aligned} \therefore y = cy_0 &= \left(\frac{1}{k'} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \right) k'e^{-\int P(x)dx} \\ &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \right) \end{aligned}$$

[2] RC 回路の解法

① 直流(DC) 電源

図1に示す RC 回路を考える。初期状態ではスイッチ S は開放されており, キャパシタには電荷が蓄積されていないとする。直流電圧源の両端電圧を E とし, 時刻 $t = 0$ においてスイッチ S を閉じたとき, 時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求める。

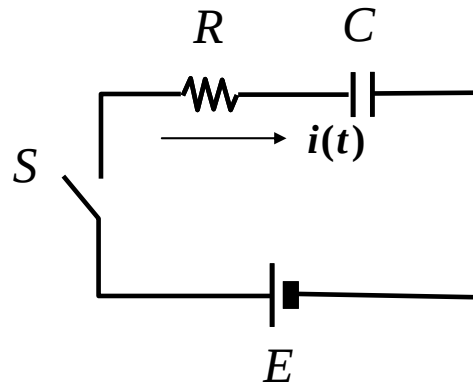


図1 RC 回路(直流電圧源)

時刻 $t = 0$ 以降における回路方程式は, 電流

$$i(t) \text{ を用いて: } Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = E$$

両辺を t について微分すると, $t = 0$ 以降は E は

一定であり $\frac{dE}{dt} = 0$ だから,

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR} i,$$

$$\frac{1}{i} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}, \quad \int \frac{di}{i} = -\frac{1}{CR} \int dt$$

$$\log|i| = -\frac{t}{CR} + k \quad (k \text{ は定数}), \quad i = k'e^{-\frac{t}{CR}} \quad (k' = \pm e^k)$$

$t = 0$ でキャパシタ両端の電圧は 0 なので,

$$i(0) = \frac{E}{R}. \text{ よって } k' = \frac{E}{R} \text{ より, } i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}} \text{ となる.}$$

電流波形を模式的に図示すると図2ようになる。

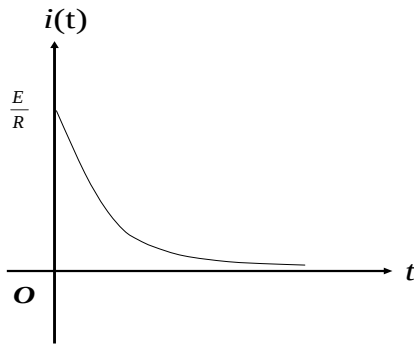
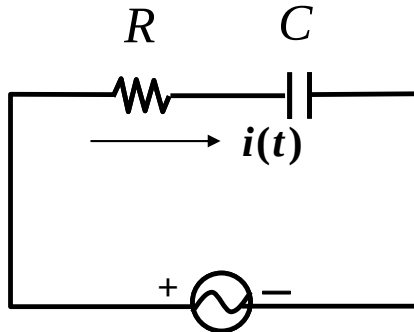


図2 図1の電流(直流電源)

② 交流(AC)電源

図3に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \geq 0$), 0 ($t < 0$) とおく。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_0 \cos \omega_0 t$$



$$v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$$

図3 RC 回路(交流電圧源)

両辺を t について微分すると,

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega_0 V_0 \sin \omega_0 t,$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{CR} = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t$$

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$P(t) = \frac{1}{CR}$, $Q(t) = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t$ なので, 式(2)に代入して,

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\int \frac{1}{CR} dt} \left(\int \left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t \right) e^{\int \frac{1}{CR} dt} dt + c_0 \right) \\ &= e^{-\frac{t}{CR}} \left(\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \right) \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt + c_0 \right) \end{aligned}$$

$P = \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt$ において部分積分すると,

$$P = \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t - CR \omega_0 \int e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega_0 t dt$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t$$

$$- CR \omega_0 \left(CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega_0 t + CR \omega_0 \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt \right)$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} (-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t) - (\omega_0 CR)^2 P$$

$$\{1 + (\omega_0 CR)^2\} P$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} (-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t)$$

$$P = CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \frac{-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t}{1 + (\omega_0 CR)^2}$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot$$

$$e^{\frac{t}{CR}} \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \sin \omega_0 t \right)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot$$

$$e^{\frac{t}{CR}} (\cos \phi \cos \omega_0 t - \sin \phi \sin \omega_0 t)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\text{ここで } \left(\tan \phi = \frac{1}{\omega_0 CR} \right), \text{ よって,}$$

$$i(t) = c_0 e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$t = 0$ において電源の電圧は V_0 であり, キャパシタの蓄積電荷量が 0 なので $i(0) = \frac{V_0}{R}$ であるから,

上式に代入して,

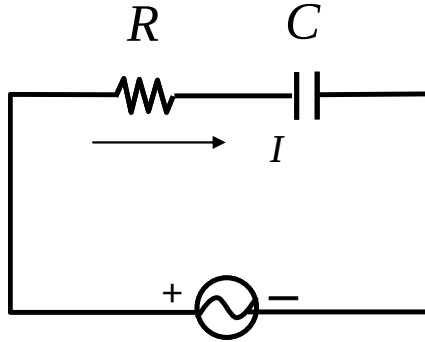
$$c_0 = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \phi$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot \frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}}$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} \frac{(\omega_0 CR)^2}{1 + (\omega_0 CR)^2} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 CR)^2}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

③ 交流回路を $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$ とおいて解く(交流の定常解)。図4。



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図4 RC 回路(交流電圧源)

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_0 e^{j\omega_0 t}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{j\omega_0 C V_0 e^{j\omega_0 t}}{1 + j\omega_0 CR} \\ &= \frac{j\omega_0 C (1 - j\omega_0 CR) V_0}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{j\omega_0 t} = \frac{\omega_0 C (\omega_0 CR + j) V_0}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{j\omega_0 t} \\ &= \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} + j \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \right) e^{j\omega_0 t} \\ &= \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \\ (\tan \phi &= \frac{1}{\omega_0 CR}) = \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} e^{j(\omega_0 t + \phi)} \end{aligned}$$

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t) = \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

この結果は②の定常解の項と一致する。

[3] RL 回路の解法

① 直流(DC)電源: 図5のRC回路を考える。
初期状態ではスイッチ S が開放されているとする。
直流電圧源の両端電圧を E とし、時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき、時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求めてみよう。時刻 $t=0$ 以降において、電流 $i(t)$ を用いて電圧に対する式をた

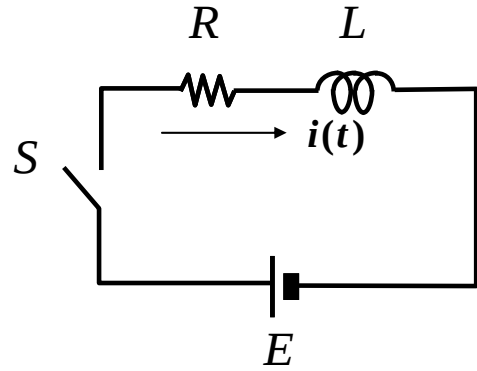


図5 RL 回路(直流電圧源)

てると以下の通りになる。

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = E, \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$$P(t) = \frac{R}{L}, \quad Q(t) = \frac{E}{L} \quad \text{なので, 式(2)に代入して,}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right) \\ &= e^{-\frac{R}{L} t} \left(\frac{E}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} dt + c_0 \right) = e^{-\frac{R}{L} t} \left(\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L} t} + c_0 \right) = \frac{E}{R} + c_0 e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

ここで $t=0$ においてインダクタ両端の電圧は E なので, $i(0)=0$ である。よって,

$$\frac{E}{R} + c_0 = 0, \quad c_0 = -\frac{E}{R} \quad \therefore i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

模式的に図示すれば図6となる。

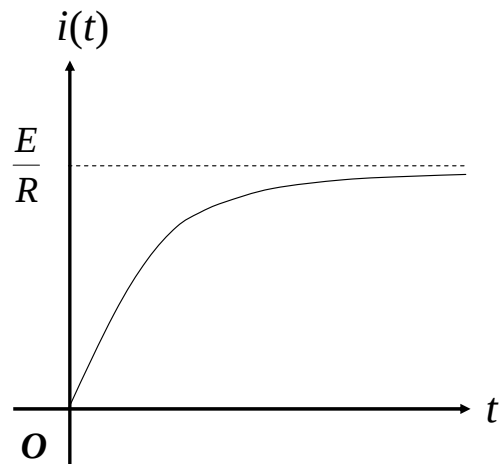


図6 図5の電流(直流電源)

② 交流(AC)電源

図7に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \geq 0$), 0 ($t < 0$) とおく。

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = V_0 \cos \omega_0 t, \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t$$

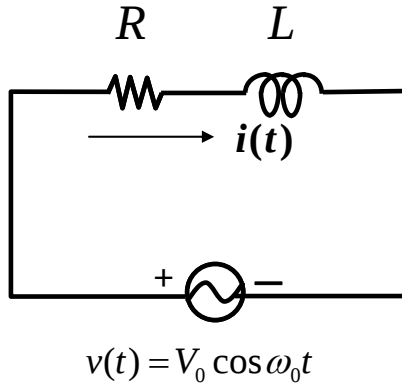


図7 RL 回路 (交流電圧源)

[1] の式 (1) の変数 x を t に置き換えて,

$P(t) = \frac{R}{L}$, $Q(t) = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t$ なので, 式(2)に代入して,

$$i(t) = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \left(\frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t \right) e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right)$$

$$= e^{-\frac{R}{L} t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right)$$

$P = \int e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t dt$ において部分積分すると,
 $P =$

$$\int e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t + \frac{L}{R} \omega_0 \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega_0 t dt$$

$$= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t$$

$$+ \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0 L}{R} \int e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t dt \right)$$

$$= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t \right) - \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 P,$$

$$\left\{ 1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 \right\} P = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t \right)$$

$$\therefore P = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \frac{\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos \omega_0 t + \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \sin \omega_0 t \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} (\cos \phi \cos \omega_0 t + \sin \phi \sin \omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R})$$

$$\therefore i(t) = e^{-\frac{R}{L} t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{V_0}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

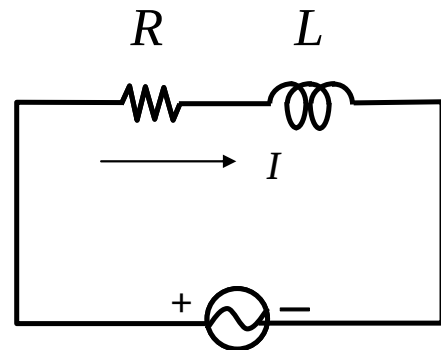
ここで $i(0) = 0$ なので, 上式に代入して,

$$c_0 = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos \phi$$

$$= -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \left[-\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2} e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi) \right]$$

③ 交流回路を $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$ において解く (交流の定常解)。図8。



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図8 RL 回路 (交流電圧源)

$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{V_o e^{j\omega_0 t}}{R + j\omega_0 L} = \frac{V_o}{R} \frac{1}{1 + \left(j \frac{\omega_0 L}{R} \right)} e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_o}{R} \frac{1 - \left(j \frac{\omega_0 L}{R} \right)}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2} e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_o}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} - j \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \right) e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_o}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} e^{-j\phi} e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_o}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} e^{j(\omega_0 t - \phi)} \quad \left(\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R} \right)
\end{aligned}$$

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

[2]の RC 回路と比べると、位相の進み・遅れの関係が逆であることがわかる。