

第5回のまとめ

- ・ コーシーの定理
- ・ コーシー・リーマンの積分公式

$$j2\pi f(a) = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (4.5)$$

- ・ グルサの定理

$$\frac{j2\pi}{n!} f^{(n)}(a) = \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (4.6)$$

- ・ ベキ級数とテイラー展開

(正則な関数は収束半径内でベキ級数展開可能)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.5)$$

5.3 ローラン級数展開

※正則でない領域を含むときの級数展開

$f(z)$ が $z = z_0$ を除いて正則のとき次のローラン級数展開ができる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$b_n = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.7)$$

* 特異点(p.65)である z_0 を展開の中心とするテイラー展開に負のベキ乗項が追加。 z_0 で正則でないから $f^{(n)}(z_0)$ は存在しない。

$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ とおくと、 $\phi(z)$ は z_0 で正則

で、 $f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m} \dots$

となる。(なお、 b_{-1} を留数という。後述)

特異点が1つである関数のローラン展開:

例 5.5: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ を $z = 0$ でベキ級数展開

複数の特異点をもつ関数のローラン展開:

例 5.6: $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を $z = 1$ でベキ級数展開

領域を分けて級数展開する

(1) $|z - 1| < 2$, (2) $|z - 1| > 2$

5.4 ローラン級数による特異点の分類

$f(z)$ が $z = z_0$ で正則でない場合,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

正則(テイラー展開) 主要部(という)

(A) 除去可能な特異点

$f(z)$ が主要部をもたない場合

(B) m 位の極(主要部が第 m 項までである場合)

$$\frac{b_{-1}}{z - z_0} + \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

(C) 真性特異点

主要部が無数にある

第6章

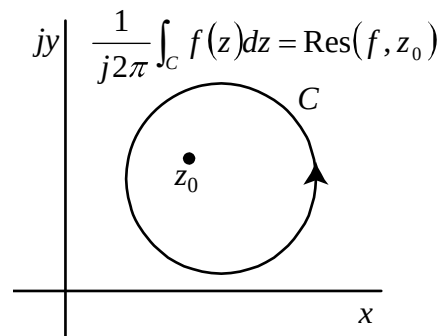
6.1 留数とは何か

関数 $f(z)$ の特異点 z_0 の周りを周回積分し、その積分値を $j2\pi$ で割った値が留数: $\text{Res}(f, z_0)$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{j2\pi} \int_C f(z) dz$$

留数を求める→積分値が求まる

C 内に特異点があれば積分は 0, 留数も 0



【留数の求め方1】

ローラン展開して-1次の項の係数 b_{-1} を求める。

【留数の求め方2】

1 位の極の留数は、 $b_{-1} = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$

m 位の極の留数は、

$$b_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \Big|_{z=z_0}$$

【留数の求め方3】

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ で、 $h(z)$, $g(z)$ は $z = z_0$ で正則かつ

$g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$ のとき、 $\text{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$

【求め方1の証明】

ローラン展開 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ の両辺を周

$$\text{回積分: } \int_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_C (z - z_0)^n dz$$

ここで, $\int_C z^m dz = \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ j2\pi & (m = -1) \end{cases}$ (教 p.109) より

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{b_{-1}}{z - z_0} dz = b_{-1} \cdot j2\pi \text{ だから, } n = -1$$

の項: $\frac{b_{-1}}{z - z_0}$ だけ残り他は 0。よって,

$$\text{Res}(f, z_0) = b_{-1}$$

【求め方2の証明】

1 位の極の場合は $f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0}$ より,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = b_{-1}$$

2 位の極では, $f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2}$,

$$\frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} [\phi(z)(z - z_0)^2 + b_{-1}(z - z_0) + b_{-2}]$$

$$= \phi'(z)(z - z_0)^2 + 2\phi(z)(z - z_0) + b_{-1}$$

よって, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = b_{-1}$

同様に m 位の極が求まる。

【求め方3の証明:】

$g(z)$ をテイラー展開する。

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

$g(z_0) = 0$ なので

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)} \frac{h(z)}{g'(z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \dots}$$

1 位の極だから, $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$

6.2 留数の定理

閉曲線 C の内部に m 個の特異点 z_i があるとき

$$\int_C f(z) dz = j2\pi \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, z_i)$$

閉曲線 C の周回積分は留数の和 $\times j2\pi$

なお積分路が時計回りならば右辺はマイナス

例 6.4p.148

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)^2} \text{ の周回積分を求めよ。}$$

積分路は $C: |z+1|=3$ で正の向きで

特異点は, $z=1, -3$ 。

$$\text{Res}(f, 1) = (z-1)f(z) \Big|_{z=1} = \frac{z}{(z+3)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{16},$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -3) &= \left[(z+3)^2 f(z) \right]'_{z=-3} = \left[\frac{z}{z-1} \right]'_{z=-3} \\ &= \frac{z-1-z}{(z-1)^2} \Big|_{z=-3} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

積分路は両特異点を含むので, 留数の定理から,

$$\int_C f(z) dz = j2\pi [\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, -3)] = j2\pi \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = 0$$

注意: 周回積分では, 特異点における留数の和を求めるだけでなく, 積分範囲の考慮が必要

6.3 複素積分による実積分

(1) 三角関数を含む定積分:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

$z = e^{j\theta}$ とおく。 $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$ だから $C: |z|=1$ にそった

周回複素積分。留数の定理求める。一般形は

$$\int_0^{2\pi} f\{\cos \theta, \sin \theta\} d\theta = \int_C f\left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{jz}$$

(6.7)式

(2) 有理関数の定積分:

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

ただし, $z \rightarrow \infty$ で $z f(z) \rightarrow 0$ とする。

$$\text{例: } \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

複素平面上の大きい半径 R の半円 C' およびその直径で囲む上半面の積分路 C を考える。複素積分にするため, 次式とする。

$$\int_C \frac{1}{z^2 + a^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx + \int_{C'} \frac{1}{z^2 + a^2} dz$$

右辺第 1 項は $R \rightarrow \infty$ で求める積分に等しい。

左辺と右辺第 2 項を求めて, 右辺第 1 項を求める。

上半面だから, $z = ja$ が 1 位の極。よって左辺は

$$\int_C \frac{1}{(z - ja)(z + ja)} dz = j2\pi \text{Res}[ja] = j2\pi \frac{1}{2ja} = \frac{\pi}{a}$$

右辺第 2 項は $R \rightarrow \infty$ で 0 となる。それは $z = Re^{j\theta}$ と

おくと $dz = Rje^{j\theta} d\theta$ より,

$$\int_{C'} \frac{1}{z^2 + a^2} dz = \int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{j2\theta} + a^2} Rje^{j\theta} d\theta$$

となり, $R \rightarrow \infty$ のとき被積分関数は $je^{-j\theta}/R$ に従

って 0 に近づく。以上から求める積分は $\frac{\pi}{a}$ 。

中間試験

日時:6月4日(木)

10時40分～12時10分

場所:S222講義室

(開始5分前までに着席すること)

範囲:教科書3.5節および7章以外の全て

注意:教科書ノート参照不可

なお,5時限目は休講

演習6返却

5月28日(木)午後1時半～5時

南3号館617号室 佐々木さんまで。

4.5 コーシーの積分公式

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則であり、点 a を C 内の点とすると、次式が成り立つ。

$$f(a) = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (4.5)$$

$$\text{あるいは} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = j2\pi f(a) \quad (4.5)$$

被積分関数を、 $f(z) \times \frac{1}{z-a}$ と変形できれば、積分せずに積分値が $j2\pi f(a)$ として求められる。

グルサの定理（コーシーの積分公式の拡張）

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則であり、点 a を C 内の点とすると、次式が成り立つ

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{j2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n=1,2,\dots) \quad (4.5)$$

被積分関数を $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ の形にできれば、積分

値は $f(z)$ の n 回微分より、 $j2\pi \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ となる。

5.2 べき級数とテーラー級数展開

関数 $f(z)$ は正則。任意の点 z_0 を中心とした $|z-z_0| < R$ に含まれる任意の点で、関数 $f(z)$ はべき級数に展開できる。

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

あるいは、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.5)$$

$z_0 = 0$ の場合をマクローリン展開という。

よく使う(関数)のべき級数展開(マクローリン展開)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

変数変換によって更に展開可能。

$$\text{例 } u = z^2 \text{ とおけば } \cos(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n}$$

$$\frac{a}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a z^n = a + a z + a z^2 + a z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

$$\frac{a}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a z^n = a - a z + a z^2 - a z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$