第4回のまとめ
- 調和関数
- 2 次元静電界，複素ポテンシャル
- 線積分，積分路，媒介変数

4.4 コーシーの定理

単一閉曲線：曲線 C が自分自身と交わらずに閉じているとき。

コーシーの定理： $\int_C f(z)dz = 0$ (4.3)

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則であるとき，積分路 C に沿った複素積分は常に0。

証明：(グリーンの定理使用)
xy 平面上の単一閉曲線 C で囲まれた領域を F とすると，2つの関数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ には，次式のグリーンの定理が成り立つ。

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

前出の式(4.1)の右辺第1項，第2項にグリーンの定理をあてはめ，$f(z)$ は正則なのでコーシー・リーマンの関係式を使うと，

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + jv)(dx + jdy)$$

$$= \int_C (udx - vdy) + j\int_C (vdx + udy)$$

$$= \iint_F \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + j\iint_F \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

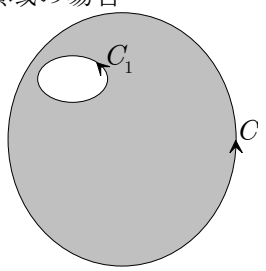
$$= \iint_F \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + j\iint_F \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= 0$$

(4.1)

となる。よって $\int_C (udx - vdy) = \int_C (vdx + udy) = 0$ となり，(4.1)から $\int_C f(z)dz = 0$ が証明できた。

多重連結領域の場合



単一閉曲線 C の内部に単一閉曲線 $C_1, C_2 \cdots C_k$ があり，C と $C_1, C_2 \cdots C_k$ の間の領域で関数 $f(z)$ は正則関数である場合，次式(4.4)が成り立つ。

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz \cdots \int_{C_k} f(z)\,dz$$

(4.4)

注：単一閉曲線で囲まれた領域を単一連結領域といい，図のように2つの曲線で囲まれた(グレーの)領域を2重連結領域，それ以上の曲線からなる場合を多重連結領域という

[復習]部分分数展開

$\dfrac{z}{(z+j)(z-2j)} = \dfrac{a}{z+j} + \dfrac{b}{z-2j}$ とおく。

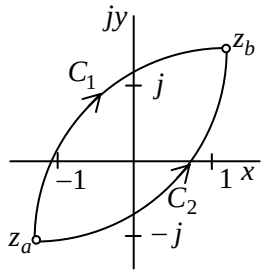
両辺に $(z+j)(z-2j)$ をかけると，

$z = (z-2j)a + (z+j)b = (a+b)z + j(-2a+b)$。

$-2a + b = 0$ より $a = b/2$，$a + b = b/2 + b = 3/2b = 1$ より $b = 2/3, a = 1/3$。以上から，

$$\frac{z}{(z+j)(z-2j)} = \frac{1/3}{z+j} + \frac{2/3}{z-2j}。$$

積分路の変更



z_a から z_b へ積分

$I_1 = \int_{C_1} f(z)dz$，$I_2 = \int_{C_2} f(z)dz$

$I_{2-} = \int_{-C_2} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz = -I_2$

C_1 を z_b から z_a へ積分

$I_{1-} = \int_{-C_1} f(z)dz = -\int_{C_1} f(z)dz = -I_1$

$C_{-1} + C_2$ の積分は

$-I_1 + I_2 = \int_{-C_1+C_2} f(z)dz$

$f(z)$ が正則ならば，でコーシー・リーマンの関係式から積分値は0より $I_1 = I_2$。よって正則な場合は積分路の変更が可能。

注：
- 正則な関数は積分路を変化させても積分値が変化せず，端点の値で決まること，また正則でない関数では積分路を変えると積分値が変化した。
- $\int_C \dfrac{1}{(z-a)^n} dz$ のように正則でない点を含む場合，積分値は0か $j2\pi$ の 2 通りだった。
- これら全て表わしているのがコーシーの定理。

4.5 コーシーの積分公式

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則であり，点 a を C 内の点とするとき，次式

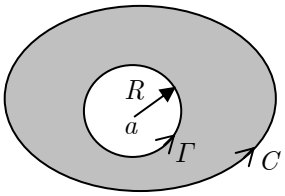
が成り立つ。

$$f(a)=\frac{1}{j2\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \quad (4.5)$$

あるいは $\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = j2\pi f(a)$ (4.5)

被積分関数を，$f(z)\times\frac{1}{z-a}$ と変形できれば，積分せずに積分値が $j2\pi f(a)$ として求められる。

証明



単一閉曲線 C の内部は正則で，ここに半径 R の領域 Γ を考える。

Γ は $z=a+R\mathrm{e}^{j\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ より $dz=jR\mathrm{e}^{j\theta}d\theta$。

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+R\mathrm{e}^{j\theta})}{R\mathrm{e}^{j\theta}}jR\mathrm{e}^{j\theta}d\theta$$

$$=j\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{j\theta})d\theta$$

左辺は R を含まない。よって十分小さい $R\ge 0$ に対して，積分は R に無関係。また $f(z)$ は連続なので，

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\lim_{R\to+0} j\int_0^{2\pi} f(a+\mathrm{R}\mathrm{e}^{j\theta})d\theta$$

$$=j\int_0^{2\pi} f(a)d\theta = j2\pi f(a)$$

。

グルサの定理（コーシーの積分公式の拡張）

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則であり，点 a を C 内の点とするとき，次式が成り立つ

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{j2\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots) \quad (4.5)$$

被積分関数を $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ の形ににできれば，積分値は $f(z)$ の n 回微分より，$j2\pi\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ となる。

証明

$a+h$ が C の内部にあるように $|h|$ を小さく取る。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{h}f(a+h)-\frac{1}{h}f(a)$$

$$=\frac{1}{h}\frac{1}{j2\pi}\int_C\left(\frac{f(z)}{z-(a+h)}-\frac{f(z)}{z-a}\right)dz$$

$$=\frac{1}{j2\pi}\int_C\frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)}dz$$

$h\to 0$ で，$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{j2\pi}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$

よって，$f'(a)=\frac{1}{j2\pi}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$

さらに，同様に進めると

$$f''(a)=\frac{2!}{j2\pi}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

以上から，グルサの定理が導かれた。

単純には（厳密ではないが）$\frac{d}{da}\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)=\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ をつかい，$f(a)=\frac{1}{j2\pi}\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz$ の両辺を a で微分することでもとまる。

定理

正則な関数 $f(z)$ は何回でも微分でき，$f(z)$ の導関数 $f^{(n)}(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ は $f(z)$ が正則である領域で正則である。

第５章

5.1 級数展開，収束半径

べき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k = a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots a_n z^n+$$

展開の中心 z_0

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k (z-z_0)^k = a_0+a_1(z-z_0)+\cdots a_n(z-z_0)^n+$$

収束

$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ のとき $f(z)$ に収束という

べき級数の収束

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

(1) $z=z_0$ のときのみ収束

(2) すべての z に対して収束

(3) $|z-z_0|<R$ で収束，$|z-z_0|>R$ で発散

R :収束半径

コーシー・アダマールの公式

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

ダランベールの判定法

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

5.2 べき級数とテーラー級数展開

関数 $f(z)$ は正則。任意の点 z_0 を中心とした $|z-z_0|<R$ に含まれる任意の点で，関数 $f(z)$ はべき級数に展開できる。

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+$$
$$\cdots\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

あるいは，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，

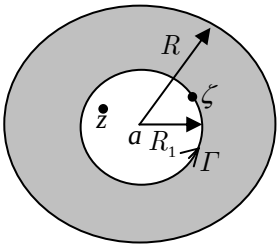
$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{j2\pi}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (5.5)$$

$z_0=0$ の場合をマクローリン展開という。

$|z-z_0|<R$:収束半径，展開の中心から一番近い特異点までの距離。

証明

$|z-z_0|=R$ の内部に点 z を任意に取る。$0<R_1<R_2$ を満足する半径 R_1 の円 Γ を点 z_0 を中心としてかき，点 z が円 Γ の内部にあるようにする。



コーシーの積分公式によって

$$f(z)=\frac{1}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\cdots①。$$

ζ は円 Γ の上にあるから，$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$。

無限等比級数の関係から

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\left\{1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\cdots\right\}$$

これを①に代入すると

$$f(z)=\frac{1}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+(z-z_0)\frac{1}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta$$
$$+\cdots+(z-z_0)^n\frac{1}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta+\cdots$$

②

ここでコーシーの積分公式とグルサの定理から

$$f(z_0)=\frac{1}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \quad ,$$

$$f'(z_0)=\frac{1}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta\ ,\ \cdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{j2\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$ である。

これらを②に代入するとテーラー級数展開となる。

よく使う（関数）のべき級数展開（マクローリン展開）

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$\mathrm{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \quad (|z|<1)$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+z^3+\cdots\ (|z|<1)$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+\cdots(|z|<1)$$

変数変換によって更に展開可能。

例 $u=z^2$ とおけば $\cos(z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{4n}$

$$\frac{a}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}az^n=a+az+az^2+az^3+\cdots\ (|z|<1)$$

$$\frac{a}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n az^n=a-az+az^2-az^3+\cdots(|z|<1)$$