第 3 回のまとめ

- 複素関数の微分と正則関数
- z_0 で正則，$f(z)$ が正則
- 正則性の判定

  コーシー・リーマンの関係式

  $W(z,\bar{z})$ への置き換え

3.4 調和関数

$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ が正則であれば，

実部 $u(x,y)$，虚部 $v(x,y)$ は調和関数である。

また，互いに他の**共役調和関数**である。

調和関数は2次元ラプラスの方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (3.3)$$

証明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

u, v は連続であるため偏微分の順番を入れ替えて $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ となる。他方も同様。

共役調和関数を求め正則関数を作る

手順① $u(x,y)$ は調和関数か判定

② コーシー・リーマンの関係式から積分して共役調和関数 $v(x,y)$ を導出

③ 正則関数は $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$

3.5 調和関数で表される実例：

2次元静電界（電界 E，電位 ϕ，電荷密度 ρ）

$E=-\mathrm{grad}\phi$，$\mathrm{div}E=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ （ガウスの法則）。

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi=-\nabla^2\phi=-\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)$$ 自由空間では $\rho=0$，ϕ が z 方向に一定ならば

$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$，となり 2 次元ラプラスの方程式

よって，静電ポテンシャル ϕ は調和関数である。

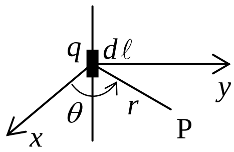
ここで，複素ポテンシャル（p.91）を考える

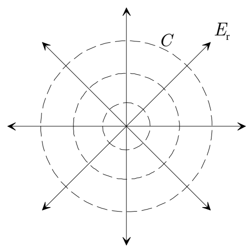
単位長さあたり q の線電荷，ガウスの法則から

$2\pi rE_r d\ell=\dfrac{q}{\varepsilon_0}d\ell$。また $E_r=-\dfrac{\partial\phi(r)}{\partial r}$ だから，任意の点 r_0 を基準にすると，$\phi(r)=-\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$。

$\phi(r)$ と複素共役な調和関数 $\psi(r)$ を考え，これらを実部虚部にもつ正則関数を，複素ポテンシャルという。

$F(z)=\phi(x,y)+j\psi(x,y)$





$F(z)=A\mathrm{Log}\ z$（A は実数）とすると，$z=re^{j\theta}$ より，

$F(z)=A\mathrm{Log}\left(re^{j\theta}\right)=A\log r+jA\theta=u+jv$ より

$u=A\log r$，$v=A\theta$（$\theta=\mathrm{Arg}\,z$ は実数）となる。$u=$ 一定は $r=$ 一定と同じで，同心円状の等ポテンシャル線を表し，$v=$ 一定は $\theta=$ 一定と同じで，ある方向の電気力線を表す。また，A は電荷量に比例した量。

第 4 章

4.1　実変数 t の複素関数の積分

$w(t)=u(t)+jv(t)$，区間 $a\le t\le b$ (実数)

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + j\int_a^b v(t)dt$$

実数と複素数とに分けて定積分すればよい。

例，$w(t) = \mathrm{e}^{jt}$ を $0 \le t \le \pi/4$，で定積分

$u = \cos t,\ v = \sin t$ だから，

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{jt} dt = \int_0^{\pi/4} \cos t dt + j\int_0^{\pi/4} \sin t dt$$

$$= \left[\sin t\right]_0^{\pi/4} + j\left[-\cos t\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

例　$I = \int_0^{2\pi} \frac{j}{r^n} \mathrm{e}^{-jnt} dt$，ただし実数 $r \ne 0$

$n = 0$ のとき $I = j\int_0^{2\pi} dt = j2\pi$，

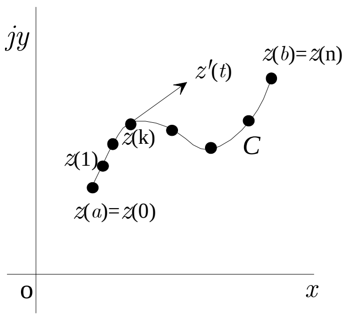
$n \ne 0$ のとき $I = \frac{j}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos nt - j\sin nt)dt = 0$

4.2 複素関数の積分

$z(a)$ から $z(b)$ までの区間を，曲線 C に沿って $n+1$ 分割して折れ線近似し，各点を z_k とする。

$C:\ z(t) = x(t) + jy(t)\ \ (a \le t \le b)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$



$|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \to 0$ として，曲線 C（積分路）に沿う複素積分は：$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_C f(z)dz$。

不定積分：正則な関数 $f(z)$ に対して $F'(z) = f(z)$ となる $F(z)$ のことで，積分路の端点を $z(a)$，$z(b)$ とすると，$\int_C f(z)dz = F\{z(b)\} - F\{z(a)\}$

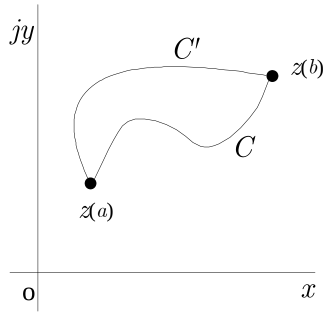
線積分

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + jv)(dx + jdy)$$

$$= \int_C (udx - vdy) + j\int_C (vdx + udy)$$

積分路

$C: z(t) = x(t) + jy(t)\ \ (a \le t \le b)$，$t$：媒介変数

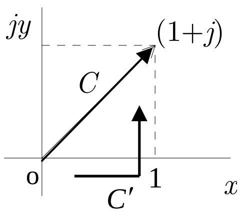


$z = z(t)$ に対し $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}dt = dx + jdy$

より，$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$

積分公式　p.102

4.3 積分路の表し方と複素積分



$\int_C z^2 dz$ を求める：

(1)積分路 C は媒介変数 t を使って

$C\ :\ z(t) = (1+j)t\ \ \ (0 \le t \le 1)$，$dz = (1+j)dt$，

$f(z) = z(t)^2 = (1+j)^2 t^2 = 2jt^2$ より

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 2jt^2(1+j)dt = 2j(1+j)\int_0^1 t^2 dt$$

$$= 2(j-1)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2(j-1)\frac{1}{3} = \frac{2}{3}(j-1)$$

積分路を変更して計算:

(2) 積分路 C' は実軸上で 0→1, そのあと $z = (1, j)$ へ進む。よって積分を2つに分けて

$C' = C_1 + C_2$: $z(t) = t\ (0 \le t \le 1)$, $dz = dt$

$+ \quad z(t) = 1 + jt\ (0 \le t \le 1)$, $dz = jdt$

$$\int_{C'} z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+jt)^2\, jdt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(1+jt)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(2j(1+j) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2j - 3\right) = \frac{2}{3}(j-1)$$

(3) 積分路 C' は実軸上で 0→1 $\sqrt{2}$, そのあと円弧 $C : |z| = \sqrt{2}$ 上を点(1, 0)から点(1, j)へ移動する場合。積分を2つに分けて

$C' = C_1' + C_2'$: $z(t) = t\ (0 \le t \le 1)$, $dz = dt$

$+ z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{j\theta}\ \ (0 \le \theta \le \pi/4)$, $dz = j\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\theta} d\theta$

$$\int_{C'} z^2 dz = \int_{C_1'} z^2 dz + \int_{C_2'} z^2 dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt + \int_0^{\pi/4} 2\mathrm{e}^{j2\theta} j\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\theta} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{3}\mathrm{t}^3\right]_0^{\sqrt{2}} + j2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{j3\theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2} + j2\sqrt{2}\left[\frac{1}{j3}\mathrm{e}^{j3\theta}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{2} + j\frac{2}{2}\right) = \frac{2}{3}(j-1)$$

※始点と終点が同じであれば, どれも同じ値になる。(特異点を含まない場合)

※積分路 $C : |z| = r$ が円周を一周する場合は

正方向:反時計方向に積分

$C : z = r\mathrm{e}^{j\theta}$ ($0 \le \theta \le 2\pi$ または $\theta : 0 \to 2\pi$)

$dz = jr\mathrm{e}^{j\theta} d\theta$,

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} r^2 e^{j2\theta} jre^{j\theta} d\theta = jr^3\left[\frac{1}{j3}e^{j3\theta}\right]_0^{2\pi} = 0$$

解く! $\int_C \overline{z}\, dz$ の積分:

(1) 積分路 $C : z(t) = (1+j)t \quad (0 \le t \le 1)$

$$\int_C \overline{z}\, dz = \int_0^1 (1-j)t\ (1+j)\, dt = 2\int_0^1 t\ dt = 1$$

(2) 積分路 $C' = C_1 + C_2$:

$z(t) = t\ (0 \le t \le 1)$, $dz = dt$

$+ \quad z(t) = 1 + jt\ (0 \le t \le 1)$, $dz = jdt$

$$\int_C \overline{z}\, dz = \int_0^1 t\ dt + \int_0^1 (1 - jt)\ jdt$$

$$= \frac{1}{2} + j\left[\frac{(1-jt)^2}{2}\frac{1}{-j}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-2j-1)$$

$$= 1 + j$$

※正則関数でない場合は積分路で値が変わる

よく使う積分例 p.109 例 4.6

$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz$, C :中心 $z = a$, 半径 r の円, C は,

$z = a + re^{j\theta}$,

積分の方向は正方向(反時計回り), 積分範囲は

$0 \le \theta \le 2\pi$, $dz = jre^{j\theta} d\theta$

(1) $n = 1$ の場合

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{j\theta}} jre^{j\theta} d\theta = j\int_0^{2\pi} d\theta = j\left[\theta\right]_0^{2\pi} = j2\pi$$

(2) $n \ne 1$ の場合 $(n = 2, 3, \cdots)$ は

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \frac{j}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-j(n-1)\theta} d\theta$$

$$= \frac{j}{r^{n-1}}\left[-\frac{1}{j(n-1)}e^{-j(n-1)\theta}\right]_0^{2\pi} = 0$$

＊ $n = 1$ の場合のみ $j2\pi$, $n = 2, 3, \cdots$ の場合は 0 となり, 留数の計算で利用