復習:第 1 回の内容

- 複素数と複素平面　$x+jy$
- 極座標表現　$r(\cos\theta + j\sin\theta)$
- 偏角と主値　$\mathrm{Arg}\,z + 2n\pi = \theta + 2n\pi$（$n$ :整数）
- オイラーの公式　$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
- ベキ乗根（$z^n = Z$，$z=\sqrt[n]{Z}$）（$n$ 個の解）

$$z=\sqrt[n]{R}\mathrm{e}^{j\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)},\ （m=0,1,2,\cdots,n-1）$$

## 2.1 実関数

指数関数　$y=a^x$

対数関数　$y=\log_a x$　（自然対数 $\log x$，p.33）

三角関数　$y=\sin x$，$\cos x$，$\tan x$

逆三角関数　$y=\sin^{-1}x$，$\cos^{-1}x$，$\tan^{-1}x$

双曲線関数 $\cosh x = \dfrac{e^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$\sinh x = \dfrac{e^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$$

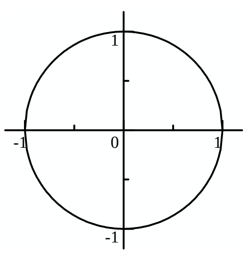
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(e^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}\right)\right\}=1$$

$$\left(\cosh x\right)=\frac{e^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

2 変数関数（実関数）

例: $f(x,y)=x^2+y^2=r^2$

変形すると $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，$x^2+y^2=1$



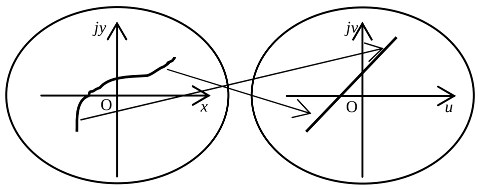

実数であるためには $r \ge x \ge -r$

## 2.2 複素関数とは

2 つの複素平面上の点または線を対応づける関数のこと

$z$ 平面上: $z=x+jy$

$w$ 平面上: $w(x,y)=u(x,y)+jv(x,y)$




例: $f(z)=z^2$，ただし $z=x+jy$ の $y=x$ とする

$f(z)=u+jv$

$z^2=(x+jy)^2=(x^2-y^2)+j2xy$

実部，虚部を比較

$u=x^2-y^2$，$v=2xy$

$y=x$ を代入すると，$u=0$，$v=2x^2$ となり

$z=(1+j)x \Leftrightarrow f(z)=2jx^2$

テイラー展開（無限回微分可能な関数 $f(x)$）

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ :べき級数表示可能

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

$x_0=0$ のとき $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$（マクローリン）

例えば，

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$$

## 2.3 指数関数（底は e とする）

級数定義

$$f(z)=\mathrm{e}^z=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$$

積演算の確認

$$\mathrm{e}^{z_1}\times\mathrm{e}^{z_2}$$

$$=\left(1+z_1+\frac{1}{2}z_1^2+\cdots\right)\left(1+z_2+\frac{1}{2}z_2^2+\cdots\right)$$

$$=1+(z_1+z_2)+\frac{1}{2}(z_1+z_2)^2+\cdots\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n+$$

$$=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$$

指数関数の周期性

$f(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+jy}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{jy}=\mathrm{e}^x(\cos y+j\sin y)$

$\cos y, \sin y$ は $2\pi$ の周期関数

よって，$\mathrm{e}^z$ も周期関数となる。

## 2.4 三角関数

Taylor 展開:実数の三角関数は

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$$

級数で定義 （$m$ は自然数）

$$f(z)=\cos z$$

$$=1-\frac{1}{2}z^2x+\frac{1}{24}z^4-\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}z^{2m}+\cdots$$

$$f(z)=\sin z$$

$$=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}z^{2m+1}+\cdots$$

指数関数表示（オイラーの公式複素数発展型）

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{jz}+\mathrm{e}^{-jz}}{2},\ \sin z=\frac{\mathrm{e}^{jz}-\mathrm{e}^{-jz}}{2j}$$

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{jz}+\mathrm{e}^{-jz}}{2}=\cos\left(x+jy\right)=\frac{\mathrm{e}^{j(x+jy)}+\mathrm{e}^{-j(x+jy)}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{-y}\left(\cos x+j\sin x\right)+\mathrm{e}^{y}\left(\cos x-j\sin x\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}\right)\cos x-j\left(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}\right)\sin x\right\}$$

$$=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y$$

加法定理が成り立つ

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1+z_2)=\frac{\mathrm{e}^{j(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-j(z_1+z_2)}}{2}$$

$$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{jz_1}+\mathrm{e}^{-jz_1}}{2}\frac{\mathrm{e}^{jz_2}+\mathrm{e}^{-jz_2}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{jz_1}-\mathrm{e}^{-jz_1}}{2j}\frac{\mathrm{e}^{jz_2}-\mathrm{e}^{-jz_2}}{2j}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{j(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{j(z_1-z_2)}+\mathrm{e}^{j(z_2-z_1)}+\mathrm{e}^{-j(z_1+z_2)}}{4}+$$

$$\frac{\mathrm{e}^{j(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{j(z_1-z_2)}-\mathrm{e}^{j(z_2-z_1)}+\mathrm{e}^{-j(z_1+z_2)}}{4}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{j(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-j(z_1+z_2)}}{2}$$

逆三角関数

$f(z)=\sin^{-1}z$，$\cos^{-1}z$，$\tan^{-1}z$

解く: $\cos^{-1}z=w\rightarrow z=\cos w$

## 2.5 双曲線関数

定義　$\cosh z=\dfrac{e^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}$，$\sinh z=\dfrac{e^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}$

$e^z=\cosh z+\sinh z$，$e^{-z}=\cosh z-\sinh z$

$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$

双曲線関数と三角関数の関係

$\cos z=\cosh(jz)$　（$\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{jz}+\mathrm{e}^{-jz}}{2}=\cosh(jz)$）

$\sin z=-j\sinh(jz)$　（$\sinh(jz)=j\sin z$）

$\cosh z=\cos(jz)$

$\sinh z=-j\sin(jz)$

$$\cosh(z_1\pm z_2)=\cosh z_1\cosh z_2\pm\sinh z_1\sinh z_2$$

$$\sinh(z_1\pm z_2)=\sinh z_1\cosh z_2\pm\cosh z_1\sinh z_2$$

$$\cos z=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y$$

$$\sin z=\sin x\cosh y+j\cos x\sinh z$$

## 2.6 対数関数

指数関数の逆関数として定義

$f(z)=w=\mathrm{e}^z$ より，$z=\log w$，

変数を入れ替えて，$w=\log z \Leftrightarrow z=\mathrm{e}^w$

指数関数は周期性があるので，$z=\mathrm{e}^w$ ならば，$z=\mathrm{e}^{w+j2n\pi}$ となる。1 つの変数 $z$ に対して $\log z$ は複数の値を取るので $w=\log z$ は多価関数。

（指数関数表示を使って）

$\log z=\log(r\mathrm{e}^{j\theta})=\log r+j(\theta+2n\pi)$（$n$ 整数）

$n=0$ の値を主値といい，大文字で表す

$\log z=\mathrm{L}\log z+j2n\pi$

$z=1$ のとき $\log 1$

1 つの変数に対して 1 つの値を取る:一価関数

## 2.7 べき関数

$f(z)=z^c=(\mathrm{e}^{\log z})^c=\mathrm{e}^{c\log z}$（$c$ 複素数，$z\neq 0$）

$z^c=\mathrm{e}^{c\,\mathrm{Log}\,z}$ を主値という