第1回の内容

- 講義の予定，成績評価
- 複素数と複素平面
- オイラーの公式
- べき乗根

前半：複素関数

強制振動を簡単に解くことができる

ラプラス，フーリエ変換などの逆変換ができる

量子力学にはなくてはならない関数

後半：微分方程式

時間変化，位置変化の過渡現象が解ける

強制振動（ダンパーやLRC回路）が解ける

1.1　複素数とは何か

x，y：実数，j 虚数単位

$j=\sqrt{-1}\ \left(j^2=-1\right)$

複素数　$z=x+jy$，（x：実部，y：虚部）

$x=0$ の場合を純虚数

実数　自然数（正の整数）

負の整数

ゼロ

有理数（m/n，m,n は整数）

無理数（$\sqrt{2}$, e, π など）

四則演算（加減乗除）

$z_1=x_1+jy_1$，$z_2=x_2+jy_2$

$z_1\pm z_2=(x_1+x_2)\pm j(y_1+y_2)$　複号同順

$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+j(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

ただし $z_1\neq 0$

例：$z_1=-2+j3$，$z_2=1-j2$

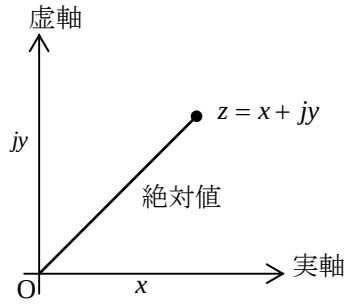
$z_1+z_2=-1+j$，$z_1-z_2=-3+j5$

$z_1\cdot z_2=(-2+6)+j(3+4)=4+j7$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1-j2}{-2+j3}=\frac{(-2-6)+j(-3+4)}{(-2+j3)(-2-j3)}=\frac{-8+j}{4+9}=\frac{-8+j}{13}$$

1.2　複素平面

便宜的に2次元平面座標の点をある複素数に対応させた平面で，縦軸を虚軸，横軸を実軸とする。



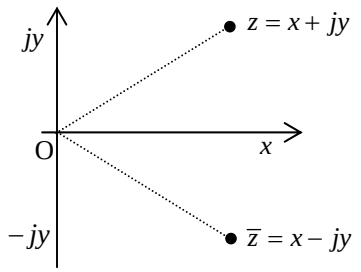
絶対値：$|z|=|x+jy|=\sqrt{x^2+y^2}$

実部の大きさ：$x=\mathrm{Re}(z)$

虚部の大きさ：$y=\mathrm{Im}(z)$

共役複素数

$\overline{z}=x-jy$　（$-z=-x-jy$ との違い）



$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{x+jy+x-jy}{2}=x$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2j}=\frac{x+jy-x+jy}{2j}=y$$

$z\cdot\overline{z}=(x+jy)(x-jy)=x^2+y^2$ より

$|z|=|x+jy|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$，$|z|^2=z\cdot\overline{z}$

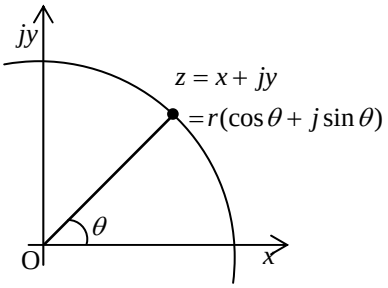
式で表す複素数平面上の線，面（範囲）

$|z|=1$：　中心 $z=0$ で半径 1 の円

$|z|<1$：　中心 $z=0$ で半径 1 の円内部，境界含まず

$|z+j|=1$：　中心 $z=-j$ で半径 1 の円

1.3　極座標表現とオイラーの公式



$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$（角度:反時計回り）

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

$z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta)$とおける。

r を複素数の絶対値，θ を偏角という。

偏角 : $\theta = \arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2n\pi$ 又は $\theta + 2n\pi$（n :整数）

θ は 2π 毎に同じ値を取るので，$-\pi \le \theta \le \pi$，または $0 \le \theta \le 2\pi$ の範囲の値を偏角の主値といい，$\mathrm{Arg}\, z$ で表す。

例　$z = 1 - j\sqrt{3}$ を極座標表現

$|z| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2$，$\mathrm{Arg}\, z = \tan^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

$\arg z = -\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$　（n は整数）。よって

$$z = 1 - j\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\right)$$

四則演算と共役複素数

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z}_2}{\overline{z}_1}$

オイラーの公式:　$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

（マクローリン展開で証明）よって，

$z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r\mathrm{e}^{j\theta}$

例　オイラーの公式を使って $z = r\,\mathrm{e}^{j\theta}$ の形に変形

$$-2j = 2(0 - j) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$-1 = (-1 - 0 \times j) = (\cos(\pi) + j\sin(\pi)) = \mathrm{e}^{j\pi}$$

$\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}$，$\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}} = \left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}\right)^2 = \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}}$，$\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{3}}$，

$\mathrm{e}^{j\theta}$ の共役複素数は

$\overline{\mathrm{e}^{j\theta}} = \overline{(\cos\theta + j\sin\theta)} = \overline{\cos\theta} + \overline{j}\,\overline{\sin\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$

$= \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-j\theta}$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta} + \mathrm{e}^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta} - \mathrm{e}^{-j\theta}}{2j}$$

$\mathrm{e}^{j\theta} \cdot \mathrm{e}^{-j\theta} = \mathrm{e}^0 = 1$

三角公式の導出: $\mathrm{e}^{j\theta_1} \times \mathrm{e}^{j\theta_2}$ より，

$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$

$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$

1.4　べき乗とベキ乗根

z のべき乗: z を n 乗した結果

$z = r\,\mathrm{e}^{j\theta}$ とおく（べき乗の時は極座標形式で）

$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{jn\theta} = r^n\cos(n\theta) + jr^n\sin(n\theta)$，また

$(r\,\mathrm{e}^{j\theta})^n = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n$ だから，

$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$

:ド・モアブルの公式

ベキ乗根

$z^n = Z$ のとき，z を Z のべき乗根という，または

z は Z の n 乗根という。

$z = r\,\mathrm{e}^{j\theta}$，$Z = R\,\mathrm{e}^{j\Theta}$ とおくと，

$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{jn\theta} = R\mathrm{e}^{j\Theta}$，よって

$r = \sqrt[n]{R}$，$n\theta = \Theta + 2m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \cdots n-1)$

$\theta = \dfrac{\Theta}{n} + \dfrac{2m\pi}{n}$　$(0 \le \theta \le 2\pi)$。以上から

$$z = \sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)},\quad (m = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$