

第2章 フーリエ変換

2-1. フーリエ変換の基礎

2-1-1 フーリエ変換の定義

$f(t)$ を周期 T の周期関数として、 $f(t)$ のフーリエ級数複素表現を考える。フーリエ級数の複素展開係数 $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} \tau\right) d\tau$ を式(1.16)の級数表現に代入すると、次式をえる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} \tau\right) d\tau \right) \exp(jn \frac{2\pi}{T} t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} (t - \tau)\right) d\tau \end{aligned}$$

ここで $\omega_n = n\omega = n \frac{2\pi}{T}$ とすると、

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(n+1)\omega - n\omega}{2\pi} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi}$$

となる。すなわち、 $f(t)$ は次のように表わされる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega_{n+1} - \omega_n) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(j\omega_n(t - \tau)) d\tau \quad (2.1)$$

ここで、 $T \rightarrow \infty$ (周期 ∞) の極限、すなわち孤立波 (非周期関数) を考えると、

$$d\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$$

となるから、 ω_n は離散的な変数から連続変数 ω になる。また、それにつれて $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ は連続変数 ω に関する積分で置き換えられ、式(2.1)は次のよう書き換えられる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(j\omega(t - \tau)) d\tau d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

すなわち、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.2)$$

とおけば、関数 $f(t)$ は次のように表される。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.3)$$

式(2.2)で与えられる $F(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換とよぶ。また、式(2.3)はフーリエ逆変換とよぶ。

周波数 ω の正弦波成分 $e^{j\omega t}$ を振幅 $F(\omega)d\omega$ だけ含むと考えると、式(2.3)は、全ての ω についてこれを加算した結果が関数 $f(t)$ になるということを表しているといえる。その意味で、 $F(\omega)$ を $f(t)$ のスペクトル密度とよぶこともある。

[注意]

フーリエ変換の定義には次のようなものもある。

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

2-1-2 フーリエ積分

$f(t)$ が実関数であるとして $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ を用いると、式(2.2)の $F(\omega)$ は次のようになる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega) \quad (2.4a)$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt : \text{フーリエ余弦変換} \quad (A(-\omega) = A(\omega)) \quad (2.4b)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt : \text{フーリエ正弦変換} \quad (B(-\omega) = -B(\omega)) \quad (2.4c)$$

これを用いると、フーリエ逆変換は次のようになる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) - jB(\omega)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \sin \omega t - B(\omega) \cos \omega t) d\omega$$

ここで、第二項の被積分関数は ω について奇関数であるから、第二項の積分は零となり、次式を得る。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \cos \omega t + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \sin \omega t \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right) d\omega \quad (2.5)$$

これを、 $f(t)$ のフーリエ積分とよぶ。

2-1-3 フーリエ変換の存在

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が存在するか否かについて、次の定理がある。

【定理】

$f(t)$ の絶対積分が収束、すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ の場合、 $F(\omega)$ が存在する。

$F(\omega)$ は孤立波のスペクトル密度を与え、連続関数である。これに対して、 c_n は周期波のスペクトルを与え、離散値をとる。 $F(\omega)$ を用いてフーリエ逆変換によって $f(t)$ を計算すると、 $f(t)$ が連続な領域では元の関数 $f(t)$ と一致し、 $f(t)$ の飛びのある点では $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ となる。

[注意]

飛びのある点におけるフーリエ逆変換の結果については、フーリエ級数の飛びのある点におけるふるまいと同様である。