

応用数値解析 - 差分法

東京工業大学・学術国際情報センター

青木 尊之

CONTENTS









1

現在のコンピュータは四則演算(論理演算)と判断のみ。時間・空間の偏微 分方程式を初期値・境界値問題として解く場合、何らかの離散化が必要。







2

差分近似

微分演算を有限区間幅の差分式に置き換える。

差分式の導出



3



差分式の導出(1)

前進差分



差分精度は Δx の1次精度

中心差分



5

7

式(1)-式(2)

$$f(x_{i} + \Delta x) = f(x_{i} - \Delta x) + 2\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_{i}} \Delta x + \frac{1}{3}\frac{\partial^{3} f}{\partial x^{3}}\Big|_{x=x_{i}} \Delta x^{3} + \cdots$$
$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_{i}} + \frac{1}{6}\frac{\partial^{3} f}{\partial x^{3}}\Big|_{x=x_{i}} \Delta x^{2} + \cdots$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_{i}} + O(\Delta x^{2})$$

 Δx の2次精度であるが、 f_i を使わないので、差分式の安定性や数値振動が入り込む可能性が高い。



6

後退差分

テーラー展開



差分精度は Δx の1次精度









2階微分に対する差分式



10

式 (1) + 式 (2)



∆x の2次精度の差分式

高い精度の差分式を構成するには、それだけ多くの格子点情報を必要と する。m 階微分に対して差分式を作には、m+1点以上の情報を必要とする





9

11

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2}$	(1 次精度)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$	(2 次精度)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12\Delta x^2}$	(4 次精度)

移流方程式 $\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ の解法

移流方程式の一般解: $\phi = F(x - ut)$

F(x)は、xの任意関数。 $\phi(t,x) = F(t-\Delta t, x-u\Delta t)$ であるので、解は、F(x)というプロファイルが、速度 u で右に移動して行く。









17

$$\frac{\delta \phi^{n+1}}{\delta \phi^n} = 1 - \frac{1}{2} C \left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x} \right)$$
$$= 1 - C i \sin k\Delta x$$

 $\left|\delta\phi^{n+1}/\delta\phi^n\right| = \sqrt{1 + C^2 \sin^2 k\Delta x}$

厳密解は $\left|\delta\phi^{n+1}/\delta\phi^{n}\right|=1$ であるが、数値計算スキーム

は $\left|\delta\phi^{n+1}/\delta\phi^{n}\right| \geq 1$ となる。

移流方程式に時間前進差分・空間中心差分を使うと不安定