

合理的思考の技術 Lecture 2

－ 選好と効用 入門 －

小林憲正

Apr 20, 2009

1 選好 preference と選択 choice

1.1 二項関係 Binary Relation

Definition 1 (二項関係). 集合 A 上の二項関係 $R \subset A^2$. $(x, y) \in R$ のとき、 xRy とも表記し、「 x と y は R で関係づけられている」。

二項関係の表現：

- 二次元平面上のグラフ
- グラフ理論 graph theory における隣接行列 adjacency matrix

Example 2. $A = \mathbb{R}$ (実数の集合) とすると、 $\geq, >, =$ はすべて A 上の二項関係。

集合 A 上の二項関係 R に関する基本性質：

反射 **reflexive** if $\forall a \in A[aRa]$

非反射 **irreflexive** if $\forall a \in A[\neg(aRa)]$

対称 **symmetric** if $\forall a, b \in A[aRb \Rightarrow bRa]$

非対称 **asymmetric** if $\forall a, b \in A[\neg(aRb \wedge bRa)]$

反対称 **antisymmetric** if $\forall a, b \in A[(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b]$

推移 **transitive** if $\forall a, b, c \in A[(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc]$

完備 **complete** if $\forall a, b \in A[aRb \vee bRa]$

非反射や非対称がそれぞれ反射や対称の全部否定であることに注意。

Example 3. A を人の集合としよう。

- 「 a は b のことを好きだ」というのは、二項関係。一般には、「好き」は対称律を満たさない。 e.g.) 片思い
- 「 a と b は友達」。対称律は満たすが、推移律は満たさない。

1.2 合理的選好 rational preference

「 a が b 以上に好ましい」という選好関係 *preference relation* を $a \succsim b$ で表す。

選好関係が（経済学用語で）合理的 *rational* であるとき、弱順序 *weak order* の公理を満たす。

Definition 4 (弱順序). 二項関係 $\succsim$ on X が弱順序である $\Leftrightarrow \succsim$ が完備性と推移律を満たす。

弱順序関係は実数上の線形順序 $\geq$ の一般化。

専門用語としての合理性：

- 好みが安定的である
- 好みが内部整合性を満たす（導かれる選択が整合的である）
- 好みは、意思決定主体の個性（社会正義、倫理、美などの外的価値に一般には制約されない）
- 合理性 $\neq$ 知性（意思決定問題が簡単であれば、簡単に解ける）

Definition 5 (弱順序関係の成分分解).

強成分 **Strict component** $a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg(b \succsim a)$

無差別成分 **Indifference component** $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge y \succsim x$

Theorem 6. $\succsim$ が合理的ならば：

- $\succ \cup \sim = \succsim$ and $\succ \cap \sim = \emptyset$
- $\succ$ は非反射的、非対称的で推移的
- $\sim$ は同値関係 *equivalence relation* (= 反射的、対称的、推移的)
- $\forall x, y, z \in X : x \succ y \sim z \Rightarrow x \succ z$

選好が合理性を満たさない場合に考えられる原因：

- 区別できないほどの微少な差
- フレーミング効果
- 多人数からなるグループを一人のアクターと見なした場合 (e.g. 法人格)
- 好みの変化 (e.g. 中毒)

1.3 顕示選好理論 入門

Definition 7 (選択構造 Choice Structure). 選択構造は、 $(\mathcal{B}, C)$ で与えられる：

- $\mathcal{B}$ 選択肢集合 X 上の非空部分集合 (= 予算集合 budget set) の族
- $C : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ 選択関数 choice correspondence $\forall B \in \mathcal{B} : C(B) \subset B$

予算集合 B 上でもっとも好まれる選択肢の集合を $C^*(B, \succsim) = \{x \in B | \forall y \in B : x \succsim y\}$ と書く。

Definition 8 (誘導). 合理的選好 $\succsim$ は選択構造 $(\mathcal{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ を導く。

Definition 9 (顕示選好). $x \succsim^* y$ (= 「 x を y 以上に好むことが示された」)
 $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x, y \in B \wedge x \in C(B)$

顕示選好は必ずしも完備や推移的であるとは限らないことに注意！

Definition 10 (合理化 Rationalization). 選択構造 $(\mathcal{B}, C)$ を所与とする。合理的選好 $\succsim$ が $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ を導くとき、この選択構造は $\succsim$ によって合理化されるという。

Theorem 11 (一意性). 合理的選好 R から導かれる選択構造を合理化する選好関係は唯一 R 自身である。

2 意思決定分析 Decision Analysis 入門

2.1 トレードオフ Tradeoff

属性 Attributes

$\{1, \dots, m\}$ 属性の集合

$x_1, \dots, x_m$ 各属性の評価 (数値)

$x \in X$ はベクトル (x_l) で表現される。

Definition 12 (パレート Pareto 順序).

$$(x \succsim y \Leftrightarrow \forall l = 1, \dots, m)(x_l \geq y_l)$$

Definition 13 (多属性効用関数 Multi-Attribute Utility Function).

$$u(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(x_i)$$

$w = (w_l)_{l=1}^m$ は重みづけ。

2.2 不確実性 Uncertainty

Definition 14 (状態依存効用関数 State-Dependent Utility Function).

$$u : \Omega \times X \rightarrow \Re$$

Definition 15 (Max-Min).

$$\max_{x \in X} \min_{\omega \in \Omega} u(\omega, x)$$

Definition 16 (期待効用最大化 Expected Utility Maximization).

$$\max_{x \in X} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(\omega, x)$$

$p(\cdot)$ は、 Ω 上の確率分布

参考文献

- Kreps, D. (1988) *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press
- Mas-Colell, A. et al. (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press