②補間と特性線に基づく方法

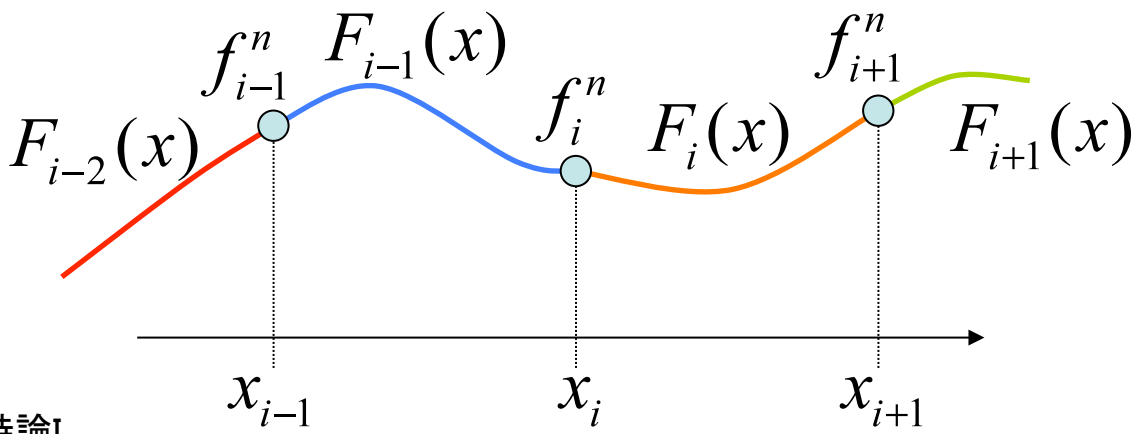
B). Hermit補間

Lagrange補間：高次の補間関数にはより外側の格子点が必要
（境界条件、ステンシルの問題）

Hermit補間：使用する格子点数を増やすのではなく、補間関数を決定する
条件を追加して、高次の補間関数を決定する方法

B-1). Cubic-Spline法

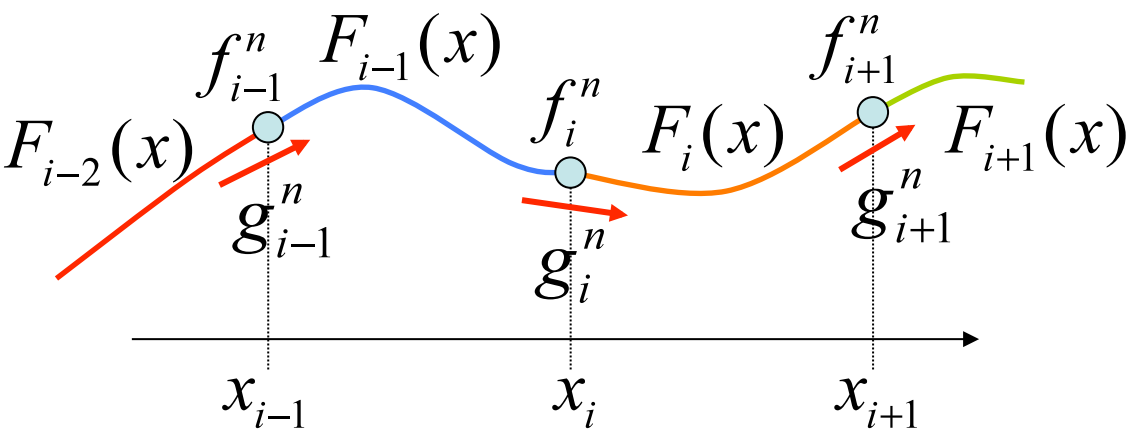
区間 $[x_i, x_{i+1}]$間を3次多項式で補間する。$F_i(x) = a_i X_i^3 + b_i X_i^2 + c_i X_i + d_i$



②補間と特性線に基づく方法

B-1). Cubic-Spline法

$$F_i(x) = a_i X_i^3 + b_i X_i^2 + c_i X_i + d_i$$



係数を決定するために、今仮に各格子点上での勾配（微分）

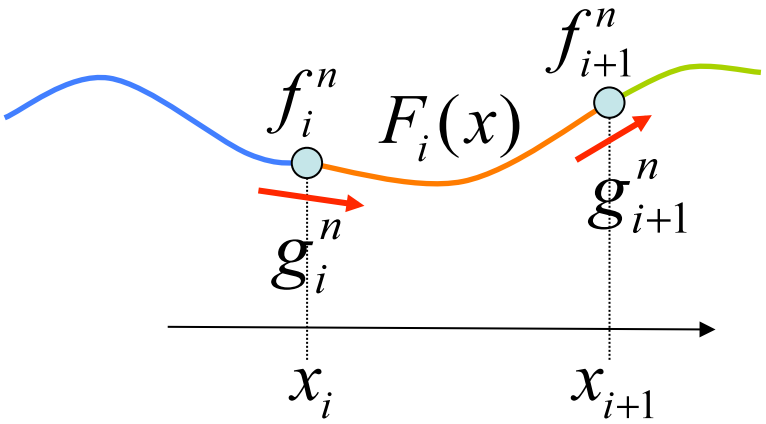
$$g_i^n = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^n$$

が分かっているとする。

②補間と特性線に基づく方法

B-1). Cubic-Spline法

区間 $[x_i, x_{i+1}]$間を考えて、両端で格子点上の f に一致することから、



$$F_i(x_i) = a_i \times 0^3 + b_i \times 0^2 + c_i \times 0 + d_i = f_i^n$$

$$F_i(x_{i+1}) = a_i \Delta x^3 + b_i \Delta x^2 + c_i \Delta x + d_i = f_{i+1}^n$$

また、勾配（微分）gにも一致するはずだから、

$$\frac{d}{dx} F_i(x) = 3a_i X_i^2 + 2b_i X_i + c_i$$

より、

$$\frac{d}{dx} F_i(x_i) = 3a_i \times 0^2 + 2b_i \times 0 + c_i = g_i^n$$

$$\frac{d}{dx} F_i(x_i) = 3a_i \Delta x^2 + 2b_i \Delta x + c_i = g_{i+1}^n$$

②補間と特性線に基づく方法

B-1). Cubic-Spline法

4つの連続条件から、

$$F_i(x_i) = a_i \times 0^3 + b_i \times 0^2 + c_i \times 0 + d_i = f_i^n$$

$$F_i(x_{i+1}) = a_i \Delta x^3 + b_i \Delta x^2 + c_i \Delta x + d_i = f_{i+1}^n$$

$$\frac{d}{dx} F_i(x_i) = 3a_i \times 0^2 + 2b_i \times 0 + c_i = g_i^n$$

$$\frac{d}{dx} F_i(x_i) = 3a_i \Delta x^2 + 2b_i \Delta x + c_i = g_{i+1}^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i = -2(f_{i+1}^n - f_i^n)/\Delta x^3 + (g_i^n + g_{i+1}^n)/\Delta x^2 \\ b_i = -3(f_i^n - f_{i+1}^n)/\Delta x^2 - (2g_i^n + g_{i+1}^n)/\Delta x \\ c_i = g_i^n \\ d_i = f_i^n \end{cases} \quad (1\text{-}51)$$

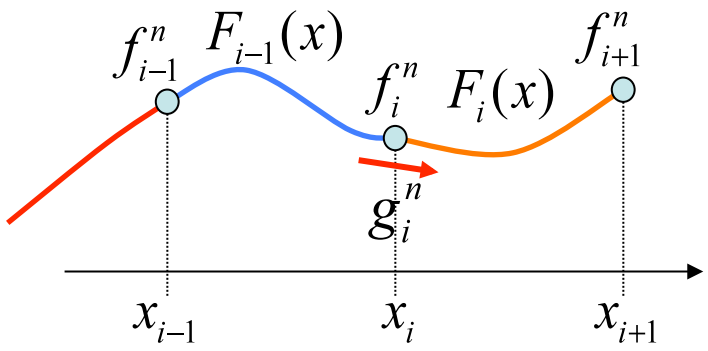
g_i^n の決定？

B-1). Cubic-Spline法

g_i^n の決定 ⇦ 付加的な条件：格子点上で g_i^n が滑らかに接続する

区間$[x_i, x_{i+1}]$の補間関数の2階微分： $\dfrac{d^2}{dx^2}F_i(x) = 6a_i X_i + 2b_i$

区間$[x_{i-1}, x_i]$の補間関数の2階微分： $\dfrac{d^2}{dx^2}F_{i-1}(x) = 6a_{i-1} X_{i-1} + 2b_{i-1}$



格子点上x_i上で2階微分が連続

区間$[x_i, x_{i+1}]$ $\dfrac{d^2}{dx^2}F_i(x_i) = 6a_i \times 0 + 2b_i = 2b_i$

区間$[x_{i-1}, x_i]$ $\dfrac{d^2}{dx^2}F_{i-1}(x_i) = 6a_{i-1}\Delta x + 2b_{i-1}$

$$\therefore 6a_{i-1}\Delta x + 2b_{i-1} = 2b_i$$

係数(1-51)を代入して整理すると、 g_i^n を決定するための条件式が得られる。

$$\boxed{g_{i+1}^n + 4g_i^n + g_{i-1}^n = \frac{3}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)}$$

B-1). Cubic-Spline法

g_i^n の決定の条件式

$$\boxed{g_{i+1}^n + 4g_i^n + g_{i-1}^n = \frac{3}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)}$$

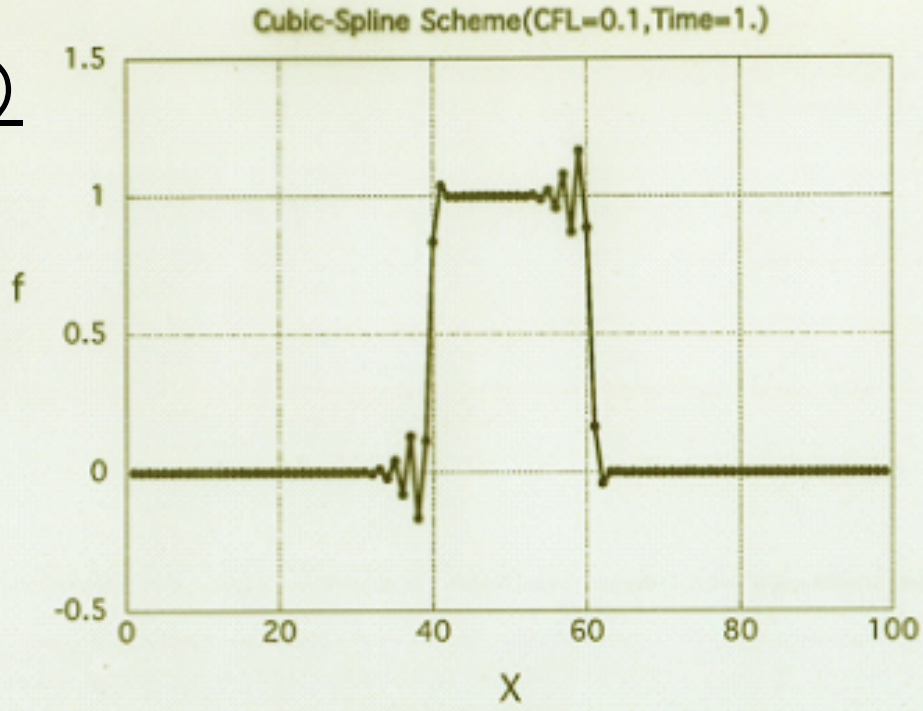
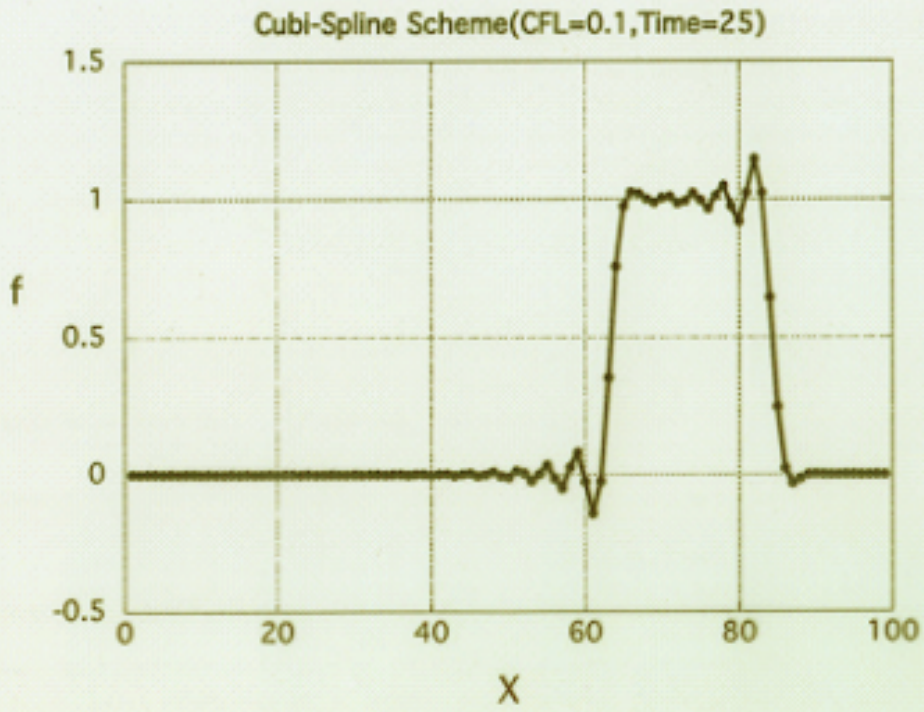
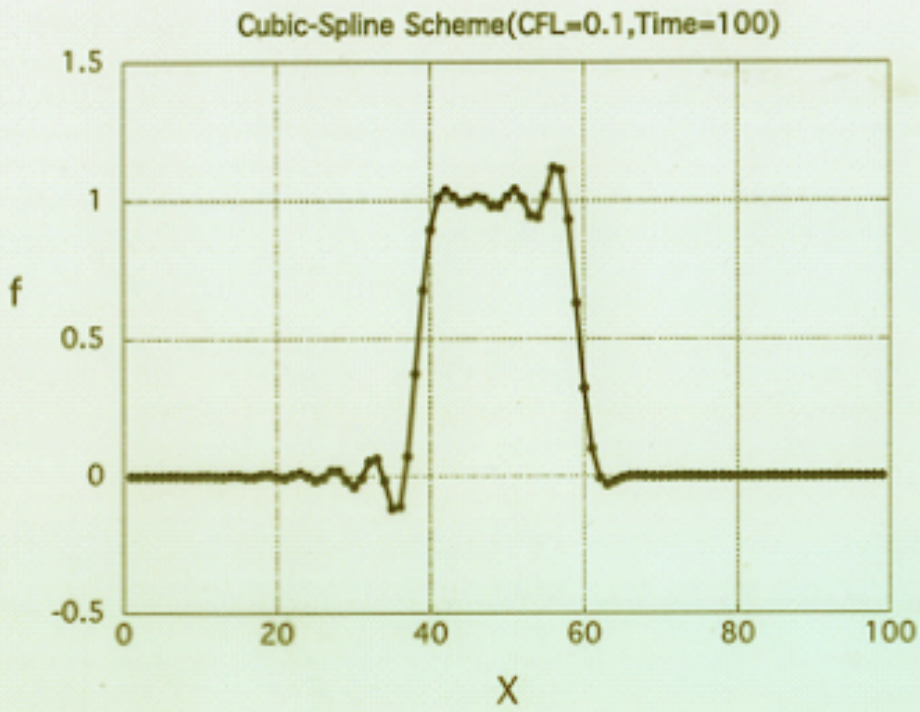
上の式を全ての格子点について連立させて、連立方程式を解く必要がある。

⇒大規模な行列計算が必要（計算コスト大）

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \text{O} & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & \text{O} & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^n \\ g_2^n \\ g_3^n \\ g_4^n \\ g_5^n \\ g_6^n \\ g_7^n \\ g_8^n \end{pmatrix} = \frac{3}{\Delta x} \begin{pmatrix} f_2^n \\ f_3^n - f_1^n \\ f_4^n - f_2^n \\ f_5^n - f_3^n \\ f_6^n - f_4^n \\ f_7^n - f_5^n \\ -f_6^n \\ f_7^n \end{pmatrix}$$

なにはともあれ、3次精度

②補間による方法（Cubic-Spline法）

- Cubic-Spline法

数値振動の発生は回避できない。