移流方程式における計算安定性の条件（CFL条件）

u<0の場合の１次風上差分の計算式： $f_i^{n+1} = f_i^n - \dfrac{u_i \Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right)$

整理すると、$f_i^{n+1} = (1-C) f_i^n + C f_{i+1}^n$ (1-49)

$$C \equiv \left| \frac{u \Delta t}{\Delta x} \right|$$

：**Courant Number (クーラン数）**

今、試みに次の式を(1-49)で見積もってみる、

$$\begin{aligned}
(f_i^{n+1} - f_i^n)(f_i^{n+1} - f_{i+1}^n) &= \{(1-C) f_i^n + C f_{i+1}^n - f_i^n\}\{(1-C) f_i^n + C f_{i+1}^n - f_{i+1}^n\} \\
&= \{-C f_i^n + C f_{i+1}^n\}\{(1-C) f_i^n - (1-C) f_{i+1}^n\} \\
&= -C(1-C)(f_i^n - f_{i+1}^n)^2
\end{aligned}$$

移流方程式における計算安定性の条件（CFL条件）

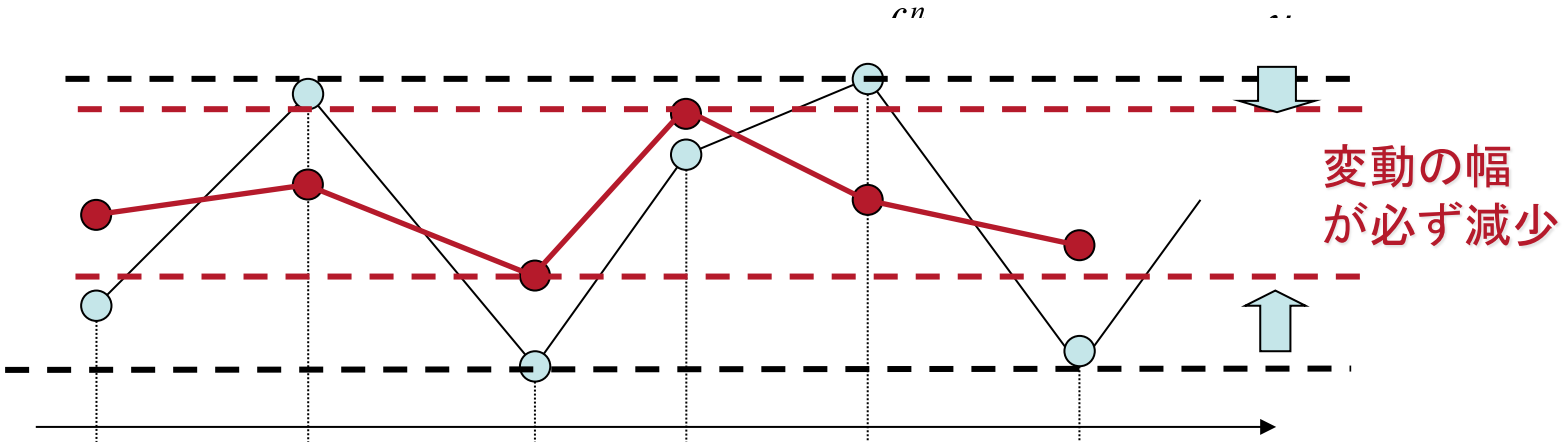
$$(f_i^{n+1} - f_i^n)(f_i^{n+1} - f_{i+1}^n) = -C(1-C)(f_i^n - f_{i+1}^n)^2 \qquad (1\text{-}50)$$

(1-50)の右辺はCの値によって符号が変化する。

$$0 \le C \le 1 \quad \Longrightarrow \quad (f_i^{n+1} - f_i^n)(f_i^{n+1} - f_{i+1}^n) \le 0$$

つまり、$\therefore f_i^n \le f_i^{n+1} \le f_{i+1}^n$ or $f_{i+1}^n \le f_i^{n+1} \le f_i^n$

次時刻の値 f_i^{n+1} は必ず f_i^n と f_{i+1}^n 間の値となる。

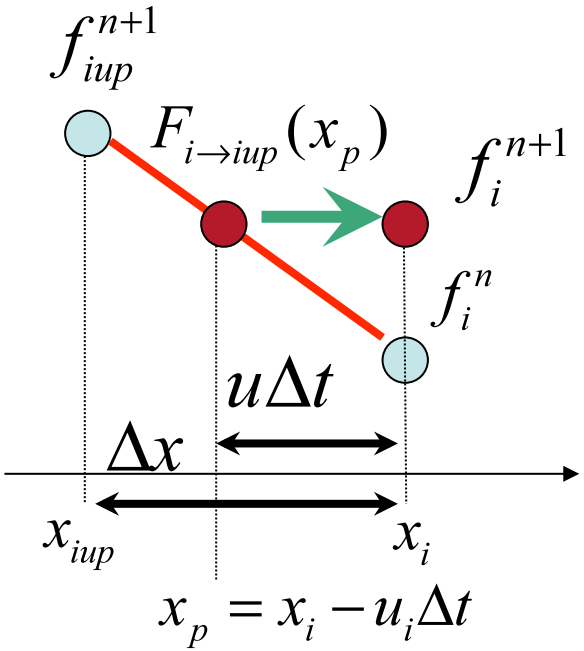


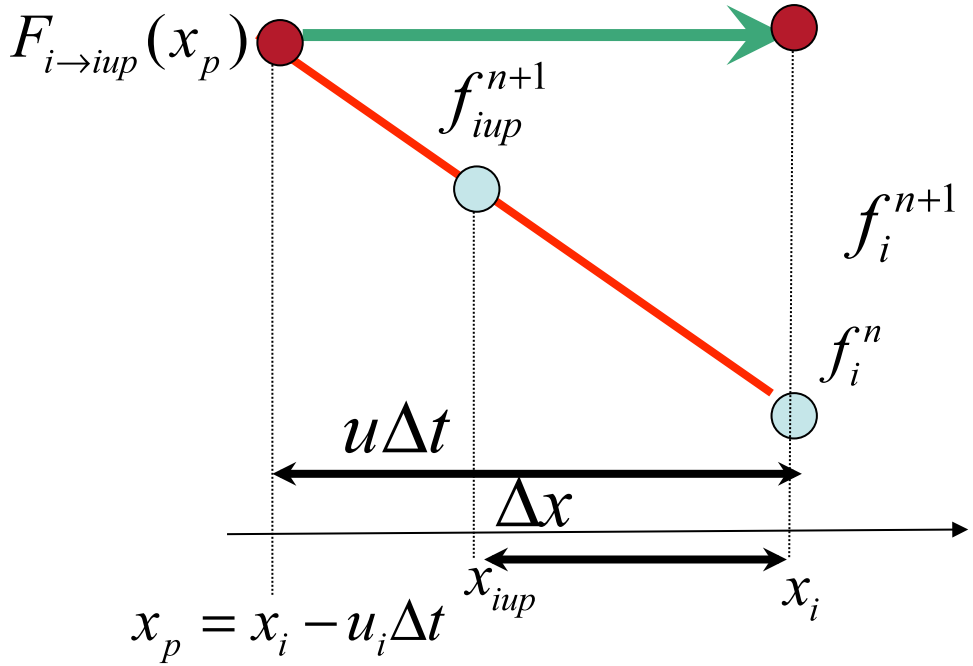
$0 \le C \le 1$ ：安定条件

Courant数の意味

$$C \equiv \left| \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right| \Rightarrow |u\Delta t| = C\,|\Delta x|$$

Δt間に移動する距離のΔxに対する比率





$0 \le C \le 1$　安定条件

移流の原点 x_p が2点間に存在するための条件（内推補間）

$1 < C$

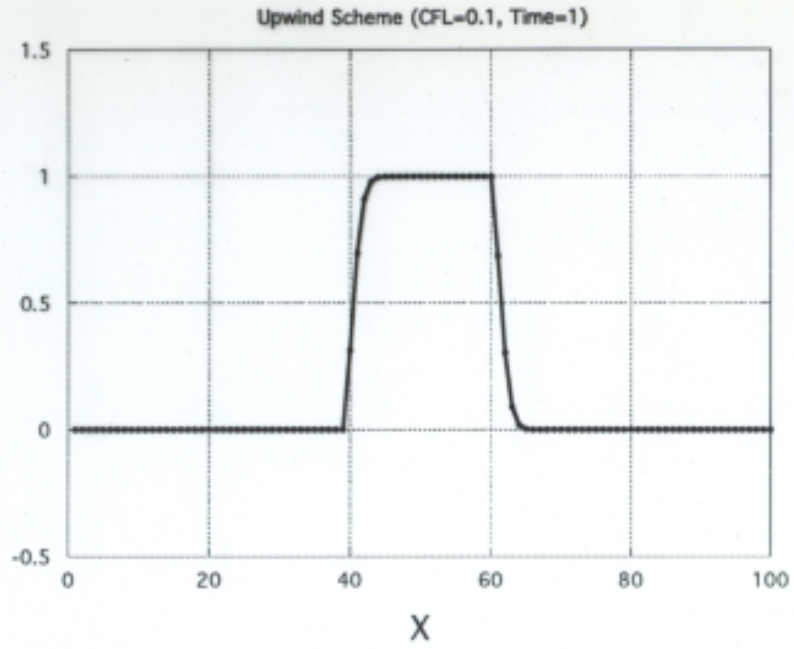
移流の原点 x_p が2点間にの外側に存在（外推補間）

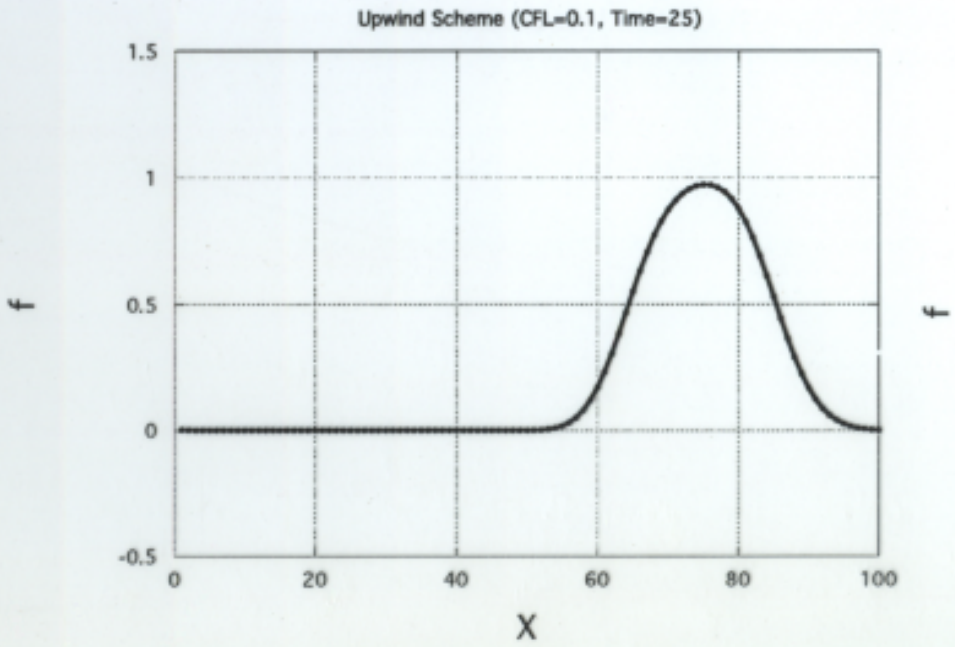
数値不安定になる。

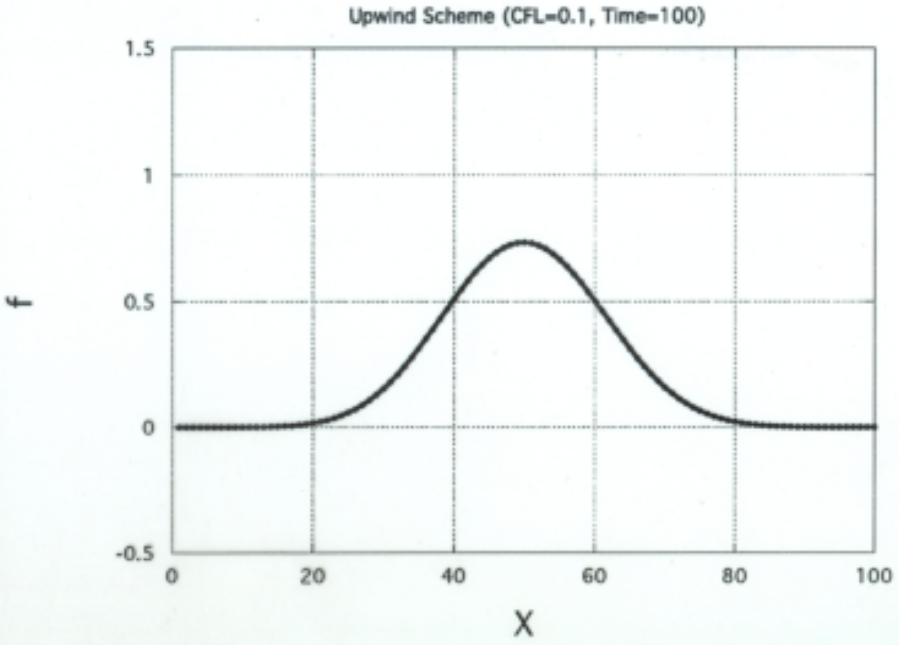
②補間による方法（1次補間）

- 直線補間 CFL=0.1

中心差分で見られた様な数値振動は見られない。
但し、**Profile**が滑らかになる。（数値拡散誤差）

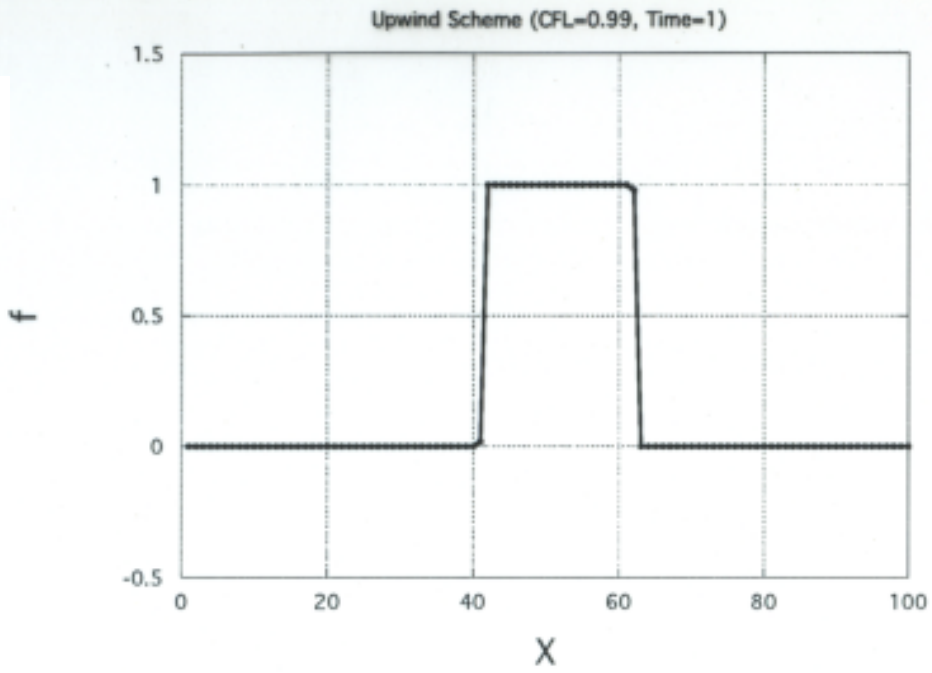


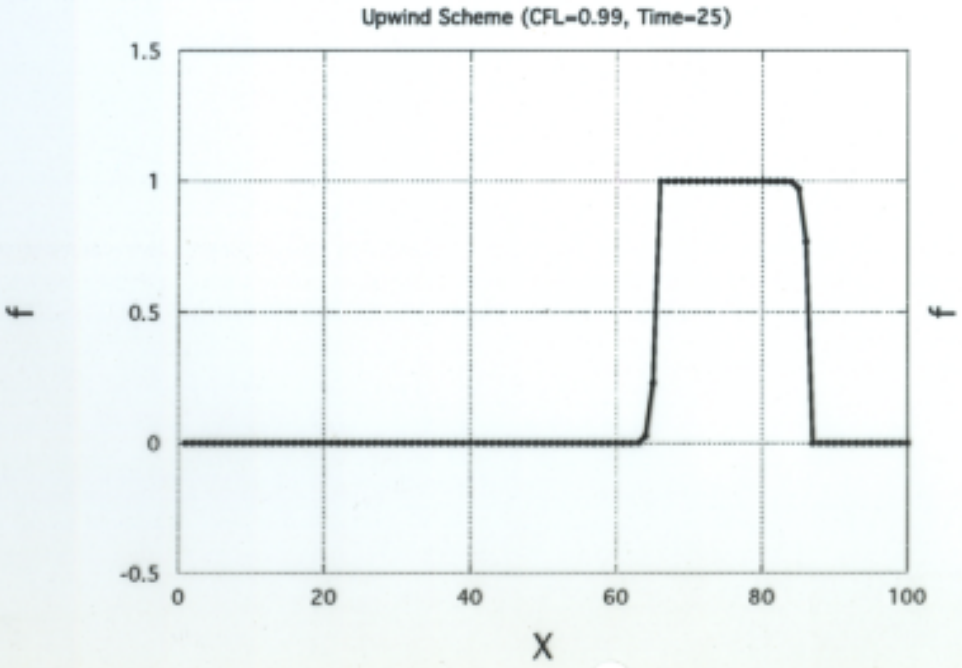


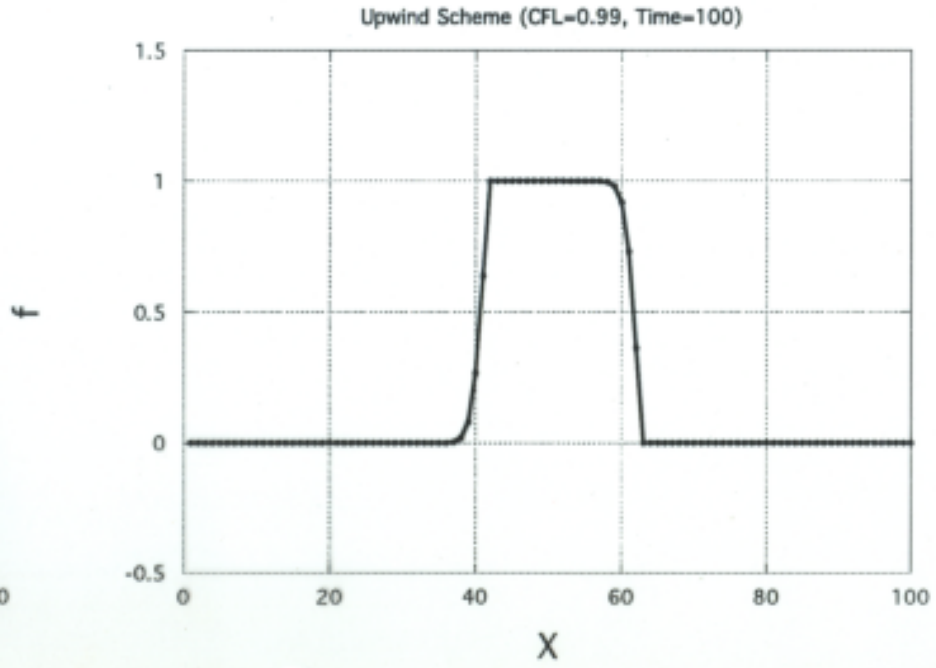


②補間による方法（1次補間）

- 直線補間 CFL=0.99

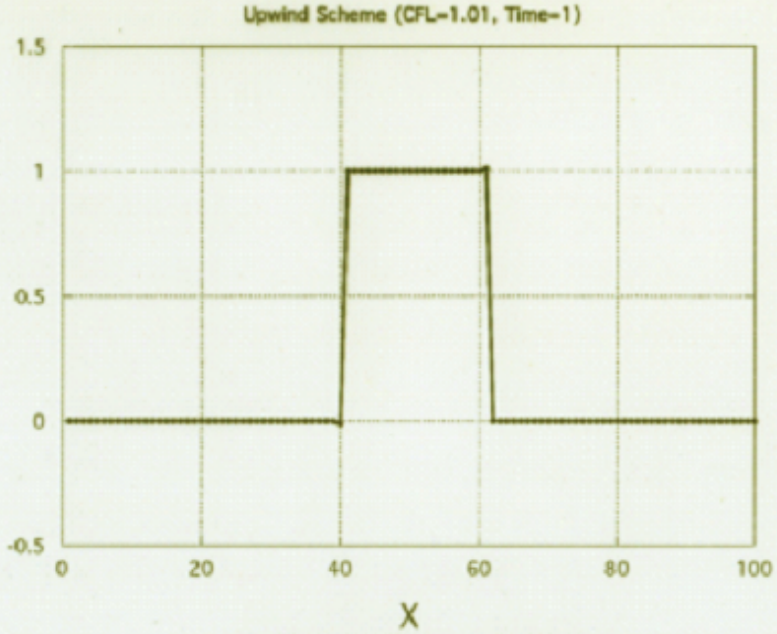


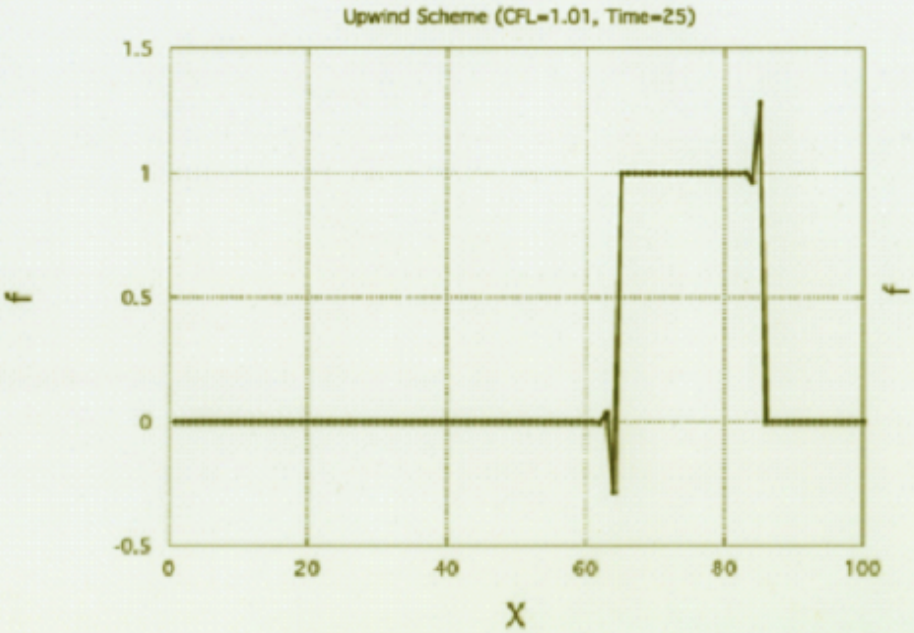


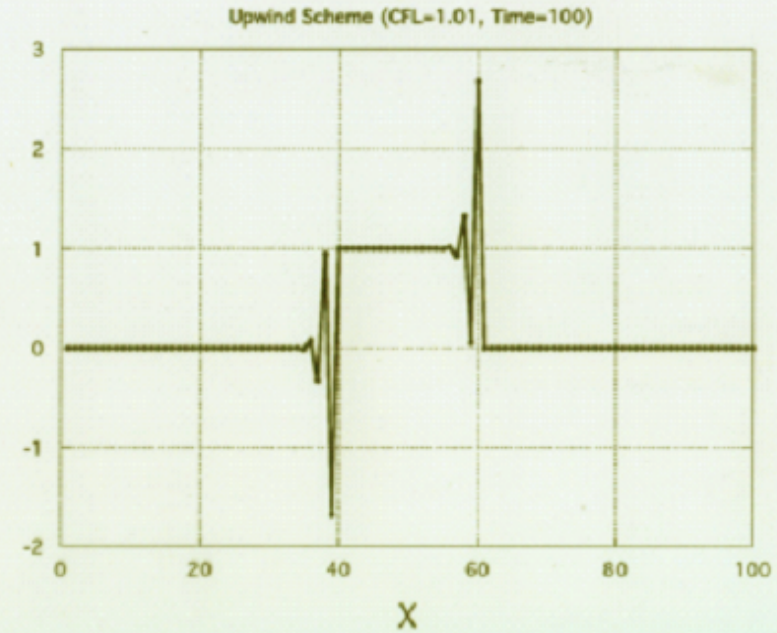


②補間による方法（1次補間）

- 直線補間 CFL=1．01







CFL条件

クーラン数 $C = \dfrac{|u_i^n \Delta t|}{|\Delta x|}$ に対する安定条件

$$0 \le C \le 1$$:CFL(Courant-Friedrich-Levy)条件

通常uは空間・時間的に変化するものであるので、各時刻 t_n において、
すべての格子点 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ について上記CFL条件が満足されるように
時間刻み幅 Δt を決定する。

$$0 \le C \le \alpha$$ α：安全係数（1以下の定数）

即ち、

$$0 < \frac{|u_i^n \Delta t|}{|\Delta x_{i \to iup}|} < \alpha \qquad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

を満たすように、

$$\boxed{\Delta t = \alpha \times \max\left(\frac{|\Delta x_{i \to iup}|}{|u_i^n|}\right)}$$