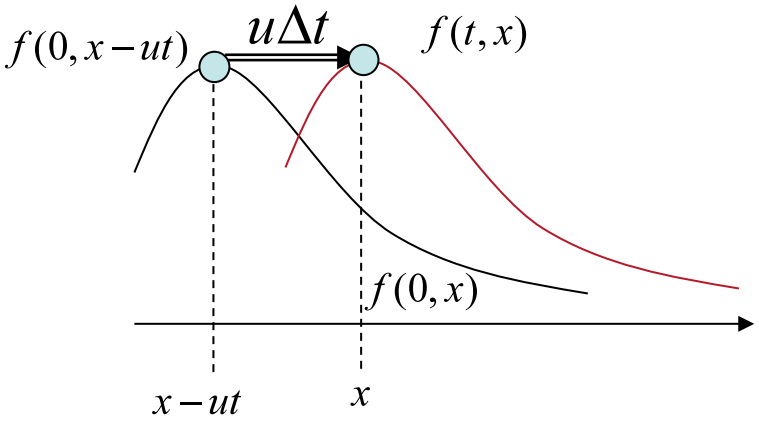
差分法による双曲型方程式の数値解法（移流方程式）－１

移流方程式

1次元移流方程式（双曲型）

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad \text{——}(1-39)$$

$f(t,x)$ ： 時間･空間の関数



解析解： $f(t,x)=f(0,x-ut)$

$u(t,x)=const.$ の場合

流速uで流れる現象（移流）

$$\because \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)+u\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}f(0,x-ut)+u\frac{\partial}{\partial x}f(0,x-ut)$$

$$=\frac{\partial(x-ut)}{\partial t}\left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right]_{\substack{t=0\\x=x-ut}}+u\left[\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right]_{\substack{t=0\\x-ut}}$$

$$=-u\left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right]_{\substack{t=0\\x=x-ut}}+u\left[\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right]_{\substack{t=0\\x-ut}}=0$$

移流方程式の差分による方法

おおまかに分けると、二つのアプローチがある。

①差分近似による微分の直接近似
②補間と特性線に基づく方法

①差分近似による微分の直接近似

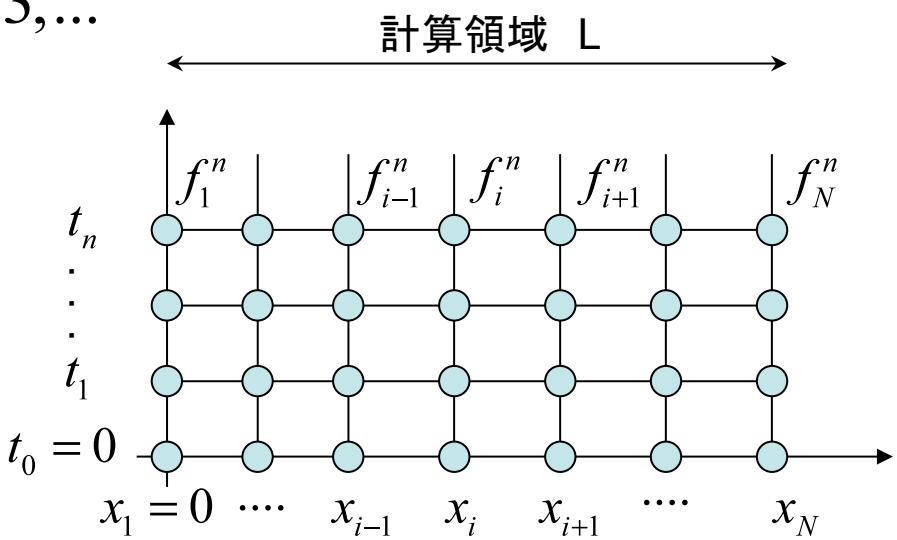
簡単のため、空間 x 方向と時間 t 方向は等間隔に計算格子点を設定する。

$$x_i = \Delta x \times (i-1), \qquad i = 1,2,3,4,\ldots,N$$

$$t_n = \Delta t \times n, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

計算する空間の幅Lのとき

$$\Delta x = L/(N-1)$$



①差分近似による微分の直接近似

微分の直接近似のもっともシンプルな方法

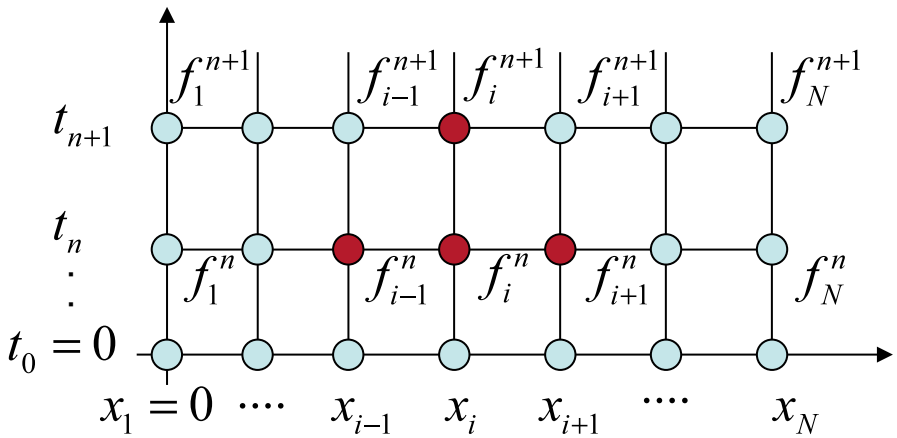
1-a).空間中心差分＋時間前進差分

時刻t_n、空間座標x_iで基礎方程式(1-39)が成り立つと考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t_n, x_i) + u \frac{\partial}{\partial x} f(t_n, x_i) = 0 \qquad \text{——}(1-40)$$

時間微分に前進差分 $$\frac{\partial}{\partial t} f(t_n, x_i) \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \qquad \text{——}(1-41)$$

空間微分に中心差分 $$\frac{\partial}{\partial x} f(t_n, x_i) \cong \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \qquad \text{——}(1-42)$$



①差分近似による微分の直接近似

1-a).空間中心差分＋時間前進差分

(1-41)&(1-42)の差分近似式により(1-40)の微分を消去

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

$$\therefore f_i^{n+1}=f_i^n-\frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{i+1}^n-f_{i-1}^n) \quad \text{——}(1-43)$$

離散式(1-43)を用いて時間発展が計算可能となる。

初期条件: $t_0 \quad \left(f_1^0, f_2^0, \ldots, f_{i-2}^0, f_{i-1}^0, f_i^0, f_{i+1}^0, f_{i+2}^0, \ldots, f_N^0\right)$

$$t_1 \quad \left(f_1^1, f_2^1, \ldots, f_{i-2}^1, f_{i-1}^1, f_i^1, f_{i+1}^1, f_{i+2}^1, \ldots, f_N^1\right)$$

$$\vdots$$

$$t_n \quad \left(f_1^n, f_2^n, \ldots, f_{i-2}^n, f_{i-1}^n, f_i^n, f_{i+1}^n, f_{i+2}^n, \ldots, f_N^n\right)$$

①差分近似による微分の直接近似

1-a).空間中心差分＋時間前進差分

境界条件： 離散式(1-43)で境界上の格子点 x_1, x_N の値 f_1^{n+1}, f_N^{n+1}

$$
\begin{aligned}
f_1^{n+1} &= f_1^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_2^n - f_0^n) \\
f_N^{n+1} &= f_N^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_{N+1}^n - f_{N-1}^n)
\end{aligned}
\qquad \text{——}(1-44)
$$

を計算するためには、領域外の値 f_0^{n+1}, f_{N+1}^{n+1} が必要⇒境界条件で与える

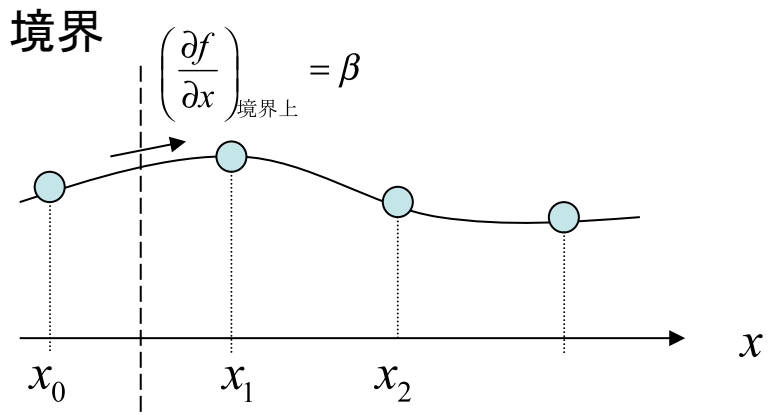
$$
\begin{array}{ccc}
f_0^n & \left(f_1^n, f_2^n, \ldots, f_{i-2}^n, f_{i-1}^n, f_i^n, f_{i+1}^n, f_{i+2}^n, \ldots, f_N^n\right) & f_{N+1}^n \\
? & \left(f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \ldots, f_{i-2}^{n+1}, f_{i-1}^{n+1}, f_i^{n+1}, f_{i+1}^{n+1}, f_{i+2}^{n+1}, \ldots, f_N^{n+1}\right) & ?
\end{array}
$$

①差分近似による微分の直接近似

1-a).空間中心差分＋時間前進差分

- Dirichlet境界（固定境界）条件： $f_0^{n+1} = \alpha$ ⇨ $f_1^{n+1} = f_1^n - \dfrac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_2^n - \alpha)$
- Nueimann境界（自由境界）条件：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{境界上} = \beta$$



境界上での傾きが以下で見積もられるとすれば、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{境界上} \cong \frac{f_1^n - f_0^n}{\Delta x}$$

Nueimann条件を満たすために以下のように与えればよいことが分かる。

$$\frac{f_1^n - f_0^n}{\Delta x} = \beta \qquad \therefore f_0^n = f_1^n - \beta\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad f_1^{n+1} = f_1^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f_2^n - f_1^n + \beta\Delta x)$$

①差分近似による微分の直接近似

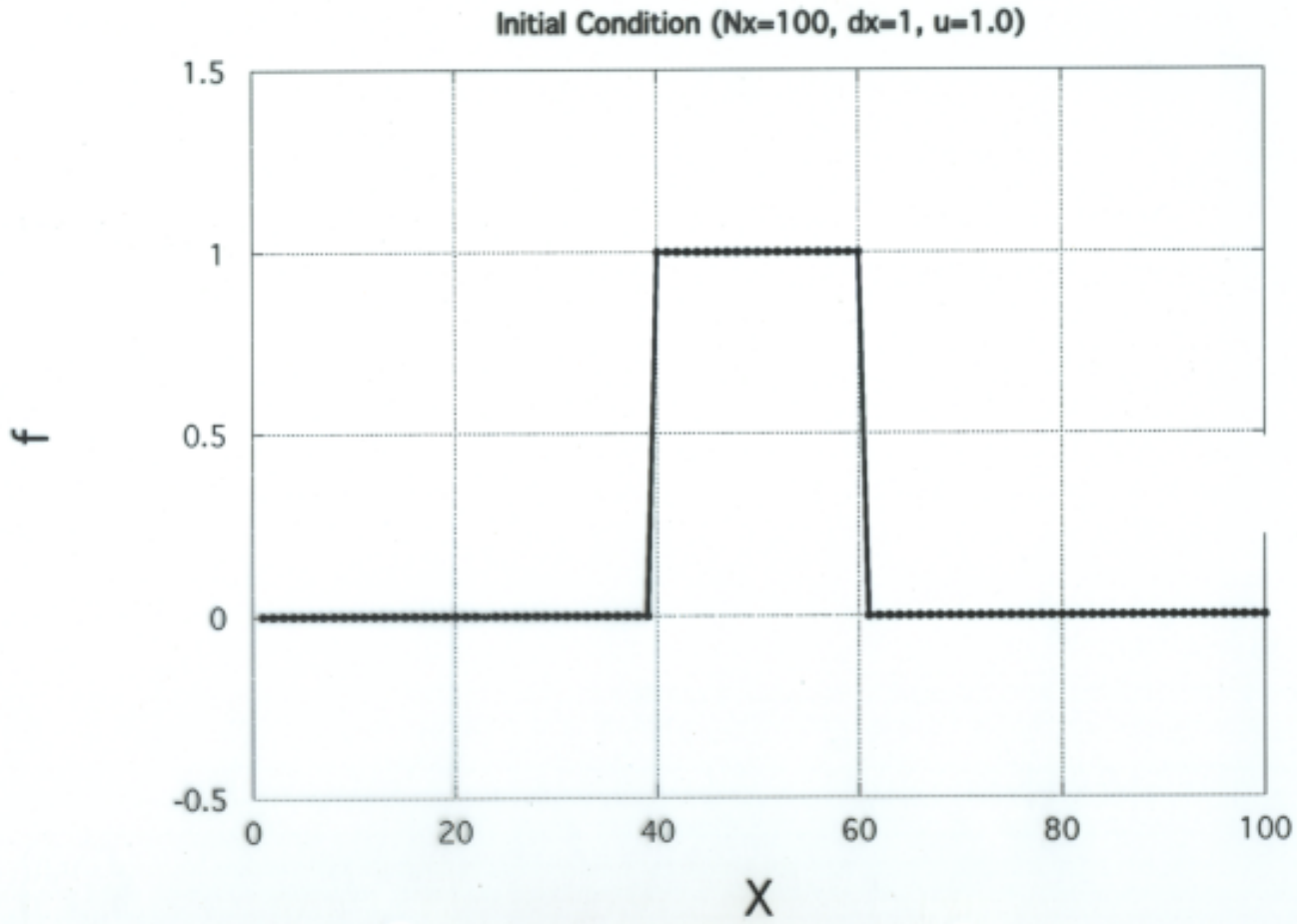
- 例題

$$\frac{\partial f}{\partial t} - u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f(x,0) = \begin{cases} 1 & for \quad 40 \le x \le 60 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$u = 1.0, \quad \Delta x = 1, \quad N_x = 100$$

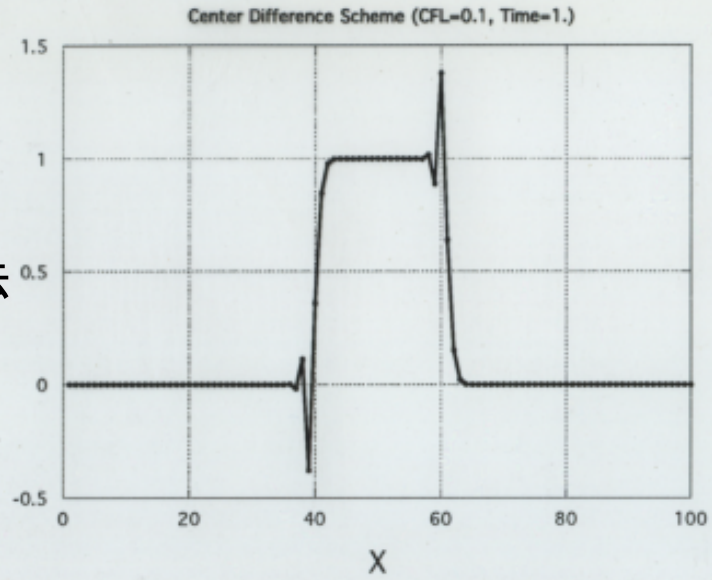
Periodic boundary condition

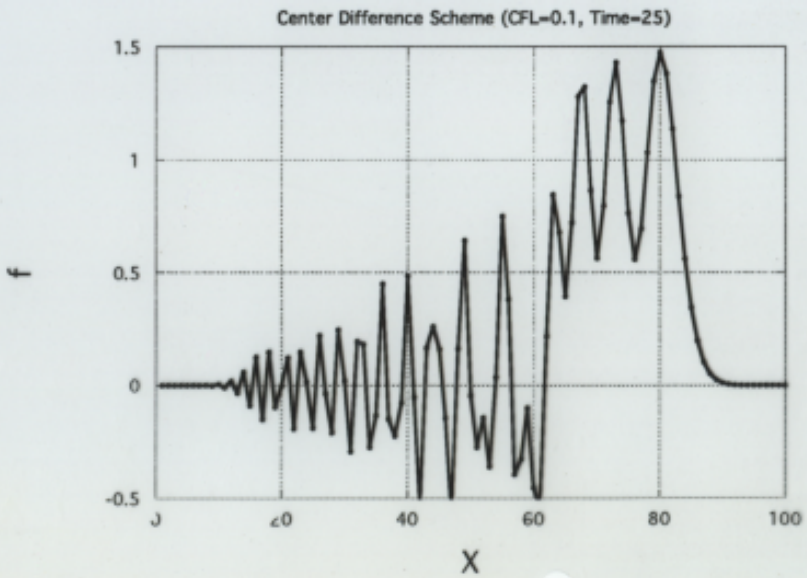


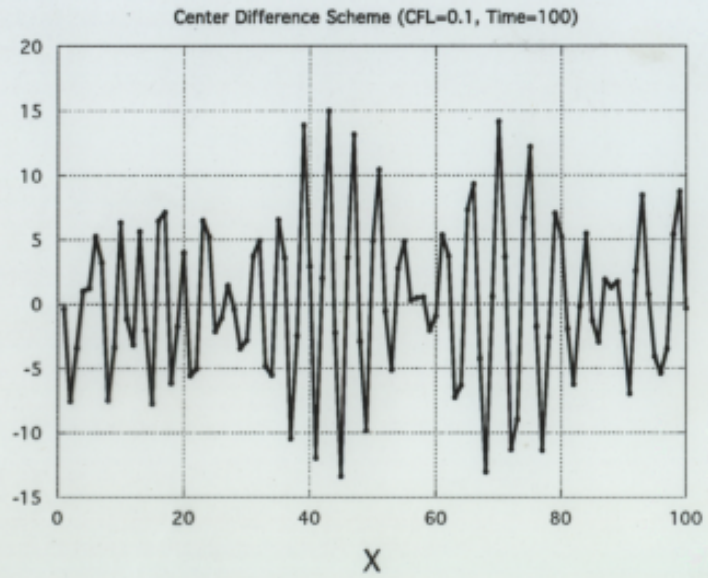
①差分近似による微分の直接近似

- 時間前進差分＋空間中心差分

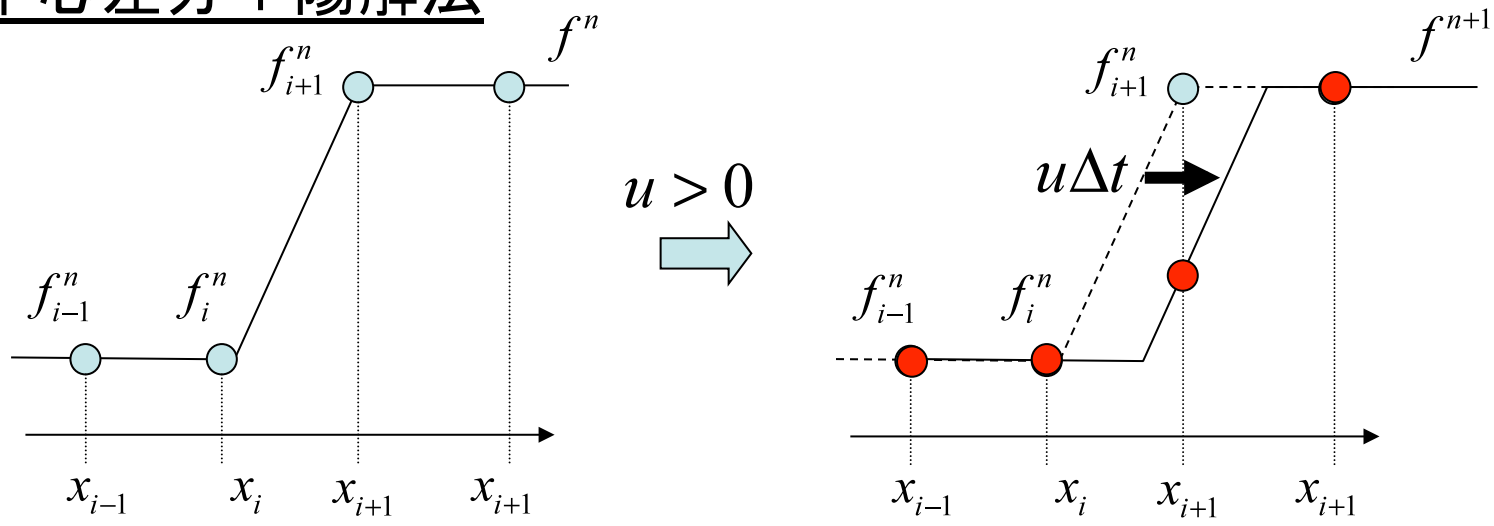
計算結果には非物理的振動（数値振動）が生じる！
実はこの離散化（計算方法）は移流方程式の数値解法では使用不可な方法である。



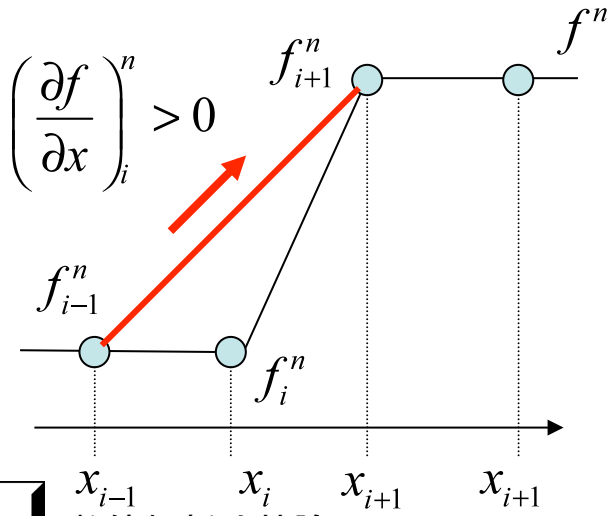




1-a).中心差分＋陽解法



$x_i : f_i^{n+1} = f_i^n$ であるべき $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)_i = -u\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_i = 0$ $\quad \therefore \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_i = 0$ であるべき



しかし、中心差分では

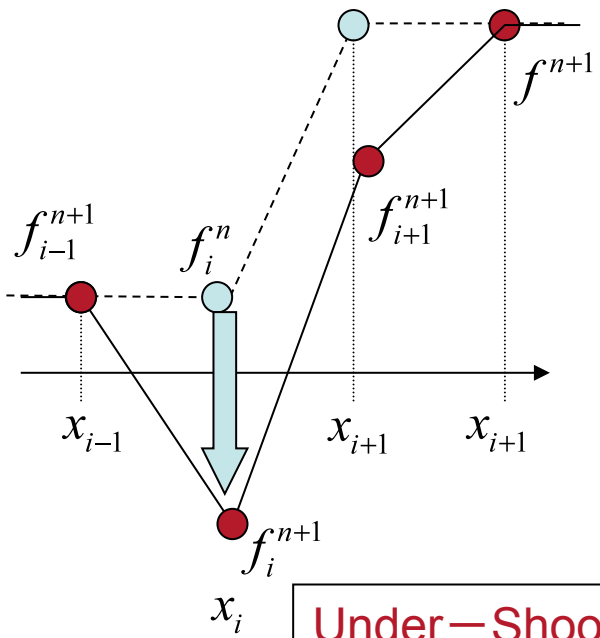
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n_i = \frac{1}{2\Delta x}(f^n_{i+1} - f^n_{i-1}) > 0$$

と見積もられるため

$$f_i^{n+1} = f_i^n \underbrace{\boxed{-\frac{u\Delta t}{2\Delta x}(f^n_{i+1} - f^n_{i-1})}}_{<0} < f_i^n$$

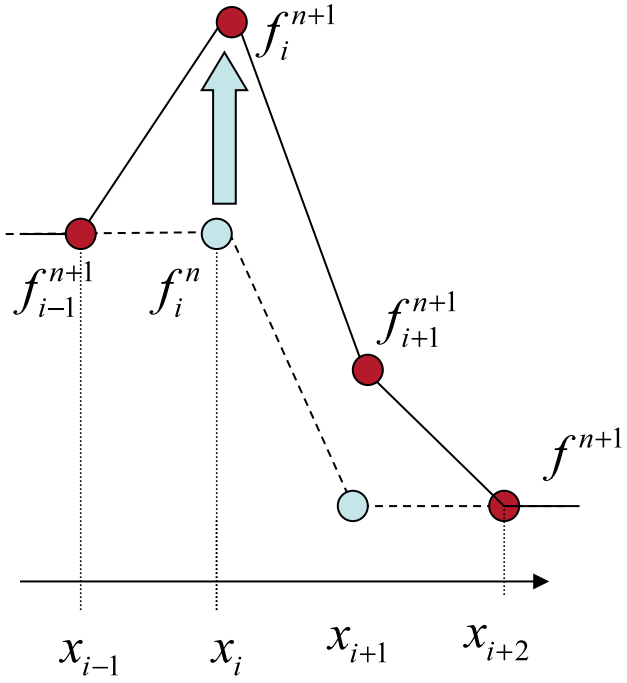
①差分近似による微分の直接近似

1-a).中心差分＋陽解法



Under－Shoot

同様に



Over－Shoot

中心差分＋前進差分の方法では、値が変動する場所で必ず数値振動が発生する！
数値振動→より大きな数値振動→…　：計算が発散する