楕円型微分方程式

B.反復法

厳密解を計算するのは、メモリー及び計算量で困難。
反復計算を行い、十分な精度の解を近似的に求める。

B-1.古典的反復法

元の楕円型PDE（１次元）: $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - r(x, f) = 0$

その解を直接求めるのではなく、仮想的な時間τを考え、
時間発展の方程式

$$\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f(x,\tau)}{\partial x^2} - r(x, f)$$

を適当な初期値から、fについて解く。

楕円型微分方程式

B-1.古典的反復法

時間発展の方程式 $\dfrac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 f(x,\tau)}{\partial x^2} - r(x,f)$

十分時間がたった後まで計算を行い、fが変化しなくなった場合、即ち、

$$\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau} = 0$$

となる定常解が求められたとすれば、それは元の方程式、

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - r(x,f) = 0$$

を満たす解である。

古典的反復法⇒仮想時間に対する定常解を求める問題

楕円型微分方程式

①Jacobi法(古典的反復法)

時間発展の方程式 $\dfrac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 f(x,\tau)}{\partial x^2} - r(x,f)$

空間中心差分＋時間前進差分で差分近似:

$$\frac{f_i^{(n+1)} - f_i^{(n)}}{\Delta\tau} = \frac{f_{i+1}^{(n)} - 2f_i^{(n)} + f_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^2} - r_i^{(n)} \qquad r_i^{(n)} = r(x_i, f(x_i, \tau_n))$$

$$\therefore f_i^{(n+1)} = f_i^{(n)} + \Delta\tau\left[-r_i^{(n)} + \frac{1}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^{(n)} - 2f_i^{(n)} + f_{i-1}^{(n)}\right)\right] \qquad \text{-☆}$$

$\Delta\tau$は大きければ大きいほど定常解に落ち着くまでの計算回数を減らせる。

$\Delta\tau = \dfrac{\Delta x^2}{2}$:中心差分＋前進差分の安定性限界

楕円型微分方程式

①Jacobi法(古典的反復法)

計算式: $\therefore f_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^{(n)} + f_{i-1}^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_i^{(n)}$

上記式を全ての格子点i=1,2,3,…Nに対して計算し、
$N \Rightarrow n+1$としても変化しなくなるまで計算する。

Step1: 初期条件 $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_3^{(0)}, \ldots, f_N^{(0)}$ を適当に与える。

ex. $f_1^{(0)} = f_2^{(0)} = f_3^{(0)} = \ldots = f_N^{(0)} = 0$

ただし、定常解（正解）に近い値を与えたほうが
収束は当然少ない回数で収束する。

楕円型微分方程式

①Jacobi法(古典的反復法)

Step2: 計算式によりn+1の解 $f_1^{(n+1)}, f_2^{(n+1)}, \ldots, f_N^{(n+1)}$ を求める。

$$f_1^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_2^{(n)} + \underline{\underline{f_0^{(n)}}}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_1^{(n)}$$

$$f_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_3^{(n)} + f_1^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_2^{(n)}$$

$$f_3^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_4^{(n)} + f_2^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_3^{(n)}$$

$$\vdots$$

$$f_N^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{f_{N+1}^{(n)}}} + f_{N-1}^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_N^{(n)}$$

境界条件

記憶する量: $f_1^{(n+1)}, f_2^{(n+1)}, \ldots, f_N^{(n+1)}$ と $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_N^{(n)}$:$2\times N$個

楕円型微分方程式

①Jacobi法(古典的反復法)

Step3: 定常解に収束しているか？判定

全ての格子点iについて

$$|f_i^{(n+1)} - f_i^{(n)}| < \varepsilon |f_i^{(n)}|$$

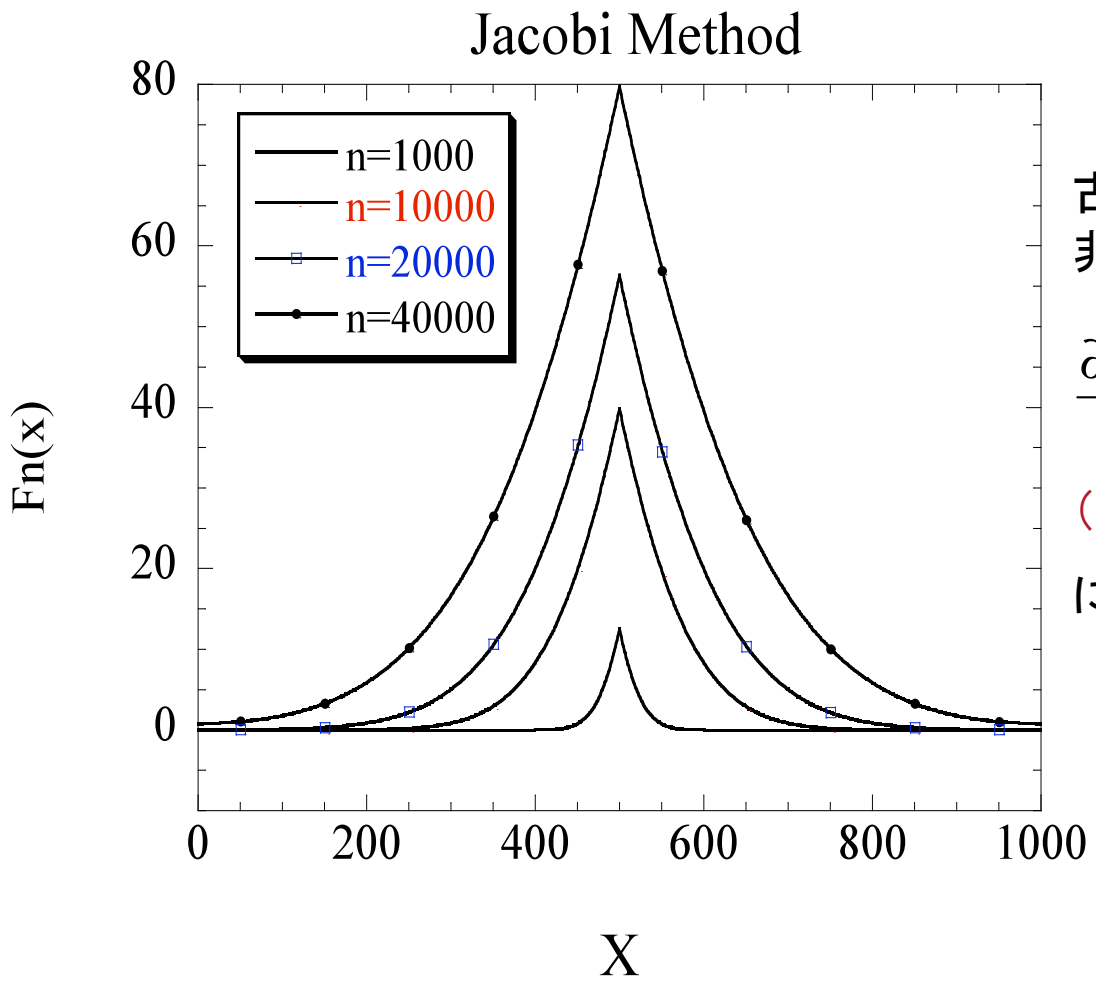
が成り立つまで、Step2に戻って計算する。

$$|f_i^{(n+1)} - f_i^{(n)}| < \varepsilon |f_i^{(n)}| \Rightarrow \frac{|f_i^{(n+1)} - f_i^{(n)}|}{|f_i^{(n)}|} < \varepsilon$$

相対変化量がε以下の場合（定常）
ε: 求める精度ごとに決める微小定数

楕円形方程式解法（古典的反復解法）－Jacobi法

$$\frac{d}{dx^2} f(x) = -\delta(x-5000)$$ 境界条件：周期境界



古典的解法では楕円形方程式を、
非定常方程式形

$$\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial \tau} = \delta(x-5000) + \frac{\partial}{\partial x^2} f(x,\tau)$$

（生成項＋拡散方程式）

に書き換えて、定常解を求める。

②Gauss-Seidel法(古典的反復法)

Step2: 計算式によりn+1の解 $f_1^{(n+1)}, f_2^{(n+1)}, \ldots, f_N^{(n+1)}$ を求める。

Jacobi法

$$f_1^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_2^{(n)} + f_0^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_1^{(n)}$$

$$f_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_3^{(n)} + f_1^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_2^{(n)}$$

$$f_3^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_4^{(n)} + f_2^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_3^{(n)}$$

$$\vdots$$

$$f_N^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_{N+1}^{(n)} + f_{N-1}^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_N^{(n)}$$

Gauss-Seidel法

計算順序

$$f_1^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_2^{(n)} + f_0^{(n)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_1^{(n)}$$

$$f_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_3^{(n)} + f_1^{(n+1)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_2^{(n)}$$

$$f_3^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_4^{(n)} + f_2^{(n+1)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_3^{(n)}$$

$$\vdots$$

$$f_N^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(f_{N+1}^{(n)} + f_{N-1}^{(n+1)}\right) - \frac{\Delta x^2}{2} r_N^{(n)}$$

右辺の見積もりに出来るだけ新しい値 $f^{(n+1)}$ を使用する。

記憶する量: $f_1^{(n+1)}, f_2^{(n+1)}, \ldots, f_i^{(n+1)}, f_{i+1}^{(n)}, \ldots, f_N^{(n)}$ $: 1 \times N$個

楕円型微分方程式

③SOR (Successive Over Relaxation)法(古典的反復法)

古典的反復法の基礎式(☆):

$$\therefore f_i^{(n+1)} = f_i^{(n)} + \left[-\frac{\Delta x^2}{2} r_i^{(n)} + \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^{(n)} - 2 f_i^{(n)} + f_{i-1}^{(n)} \right) \right]$$

一回の反復計算による変化分δ

$$\delta_i^{(n)} = \left[-\frac{\Delta x^2}{2} r_i^{(n)} + \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^{(n)} - 2 f_i^{(n)} + f_{i-1}^{(n)} \right) \right]$$

即ち、δを用いて計算式は

$$\therefore f_i^{(n+1)} = f_i^{(n)} + \delta_i^{(n)}$$

楕円型微分方程式

③SOR (Successive Over Relaxation)法(古典的反復法)

δはn⇒n+1での修正量なので、その修正量を定数倍して収束を加速することを試みる。

即ち、ωを定数（緩和係数）として、

$$\therefore f_i^{(n+1)} = f_i^{(n)} + \omega\delta_i^{(n)}$$

により時間発展(Step2)を計算する。ただし、δはGauss-Seidel法と同様の考え方をして、出来るだけ新しい値を用いることにして、

$$\delta_i^{(n)} = \left[-\frac{\Delta x^2}{2} r_i^{(n)} + \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^{(n)} - 2 f_i^{(n)} + f_{i-1}^{(n+1)} \right) \right]$$

と計算される。

③SOR法(古典的反復法)

Step2: 計算式によりn+1の解 $f_1^{(n+1)}, f_2^{(n+1)}, \ldots, f_N^{(n+1)}$ を求める。

計算順序

$$f_1^{(n+1)} = f_1^{(n)} + \omega\left[-\frac{\Delta x^2}{2} r_1^{(n)} + \frac{1}{2}\left(f_2^{(n)} - 2f_1^{(n)} + f_0^{(n+1)}\right)\right]$$

$$f_2^{(n+1)} = f_2^{(n)} + \omega\left[-\frac{\Delta x^2}{2} r_2^{(n)} + \frac{1}{2}\left(f_3^{(n)} - 2f_2^{(n)} + f_1^{(n+1)}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$f_N^{(n+1)} = f_N^{(n)} + \omega\left[-\frac{\Delta x^2}{2} r_N^{(n)} + \frac{1}{2}\left(f_{N+1}^{(n)} - 2f_N^{(n)} + f_{N-1}^{(n+1)}\right)\right]$$

右辺の見積もりに出来るだけ新しい値 $f^{(n+1)}$ を使用する。

記憶する量: $f_1^{(n+1)}, f_2^{(n+1)}, \ldots, f_i^{(n+1)}, f_{i+1}^{(n)}, \ldots, f_N^{(n)}$ $: 1\times N$個

③SOR法(古典的反復法)

緩和係数

- $0<\omega<2$の場合のみ収束する。
- $1<\omega<2$の場合：過緩和 ⇒ Gauss-Seidel法より早く収束する可能性
- $\omega=1$の場合：Gauss-Seidel法
- $0<\omega<1$の場合：不足緩和 ⇒ 非線形性が強い場合などで、安定に定常解に収束させる為に使用

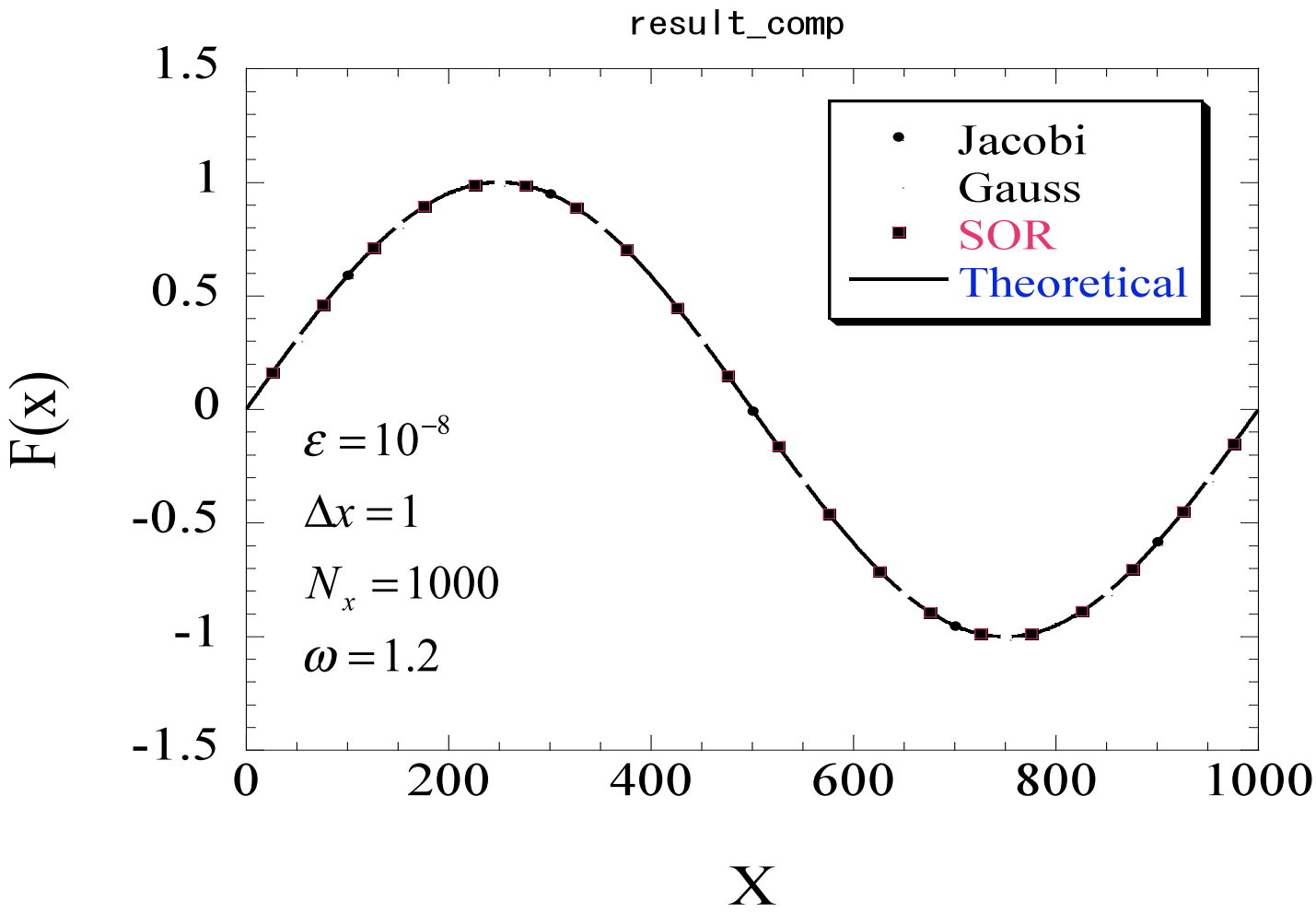
収束の速さ（定常解に達するのに必要なn）はωの値に強く依存する。

楕円形方程式解法(古典的反復解法)ー比較例題

$$\frac{d}{dx^2} f(x) = -k^2 \sin(kx), \quad k = \frac{2\pi}{1000}$$

境界条件:周期境界

理論解: $f(x) = \sin(kx)$

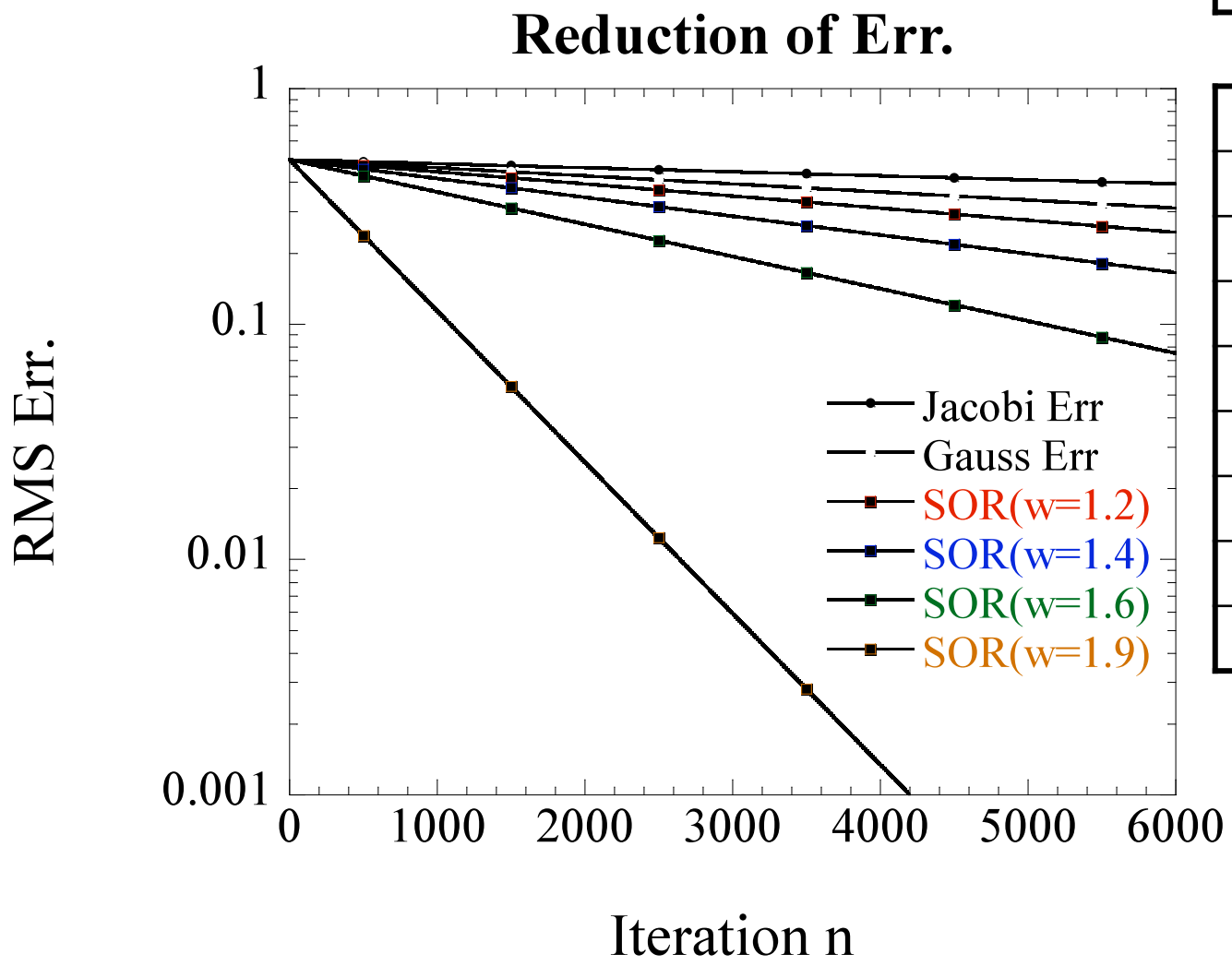


楕円形方程式解法（古典的反復解法）ー比較

ε=1e-8

緩和係数**ω**に収束速度は強く依存している。

１＜**ω**＜２である限り、**Jacobi, Gauss**法より速く収束。



	Itr. Num.
Jacobi	349,336
Gauss	192,222

SOR

ω	Itr. Num.
0.7	327,873
0.9	228,726
1.2	134,999
1.4	91,592
1.6	56,865
1.8	27,624
1.9	14,232
1.95	7,726

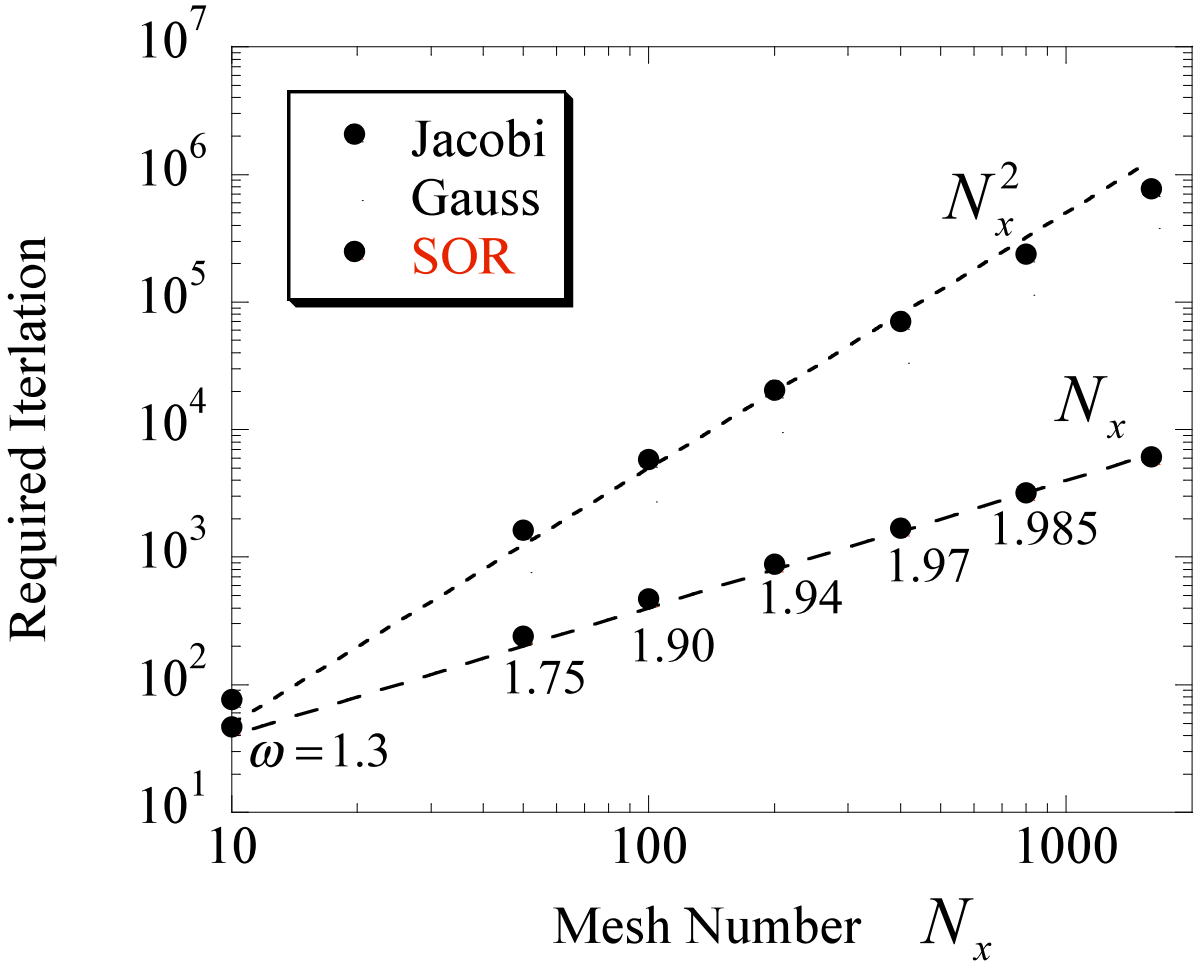
楕円形方程式解法（古典的反復解法）ー比較

メッシュ数**Nx**の増加に対して、必要精度を得るためには、

SOR：反復回数∝**Nx**　（最適ω使用）

Gauss, Jacobi：反復回数∝**Nx**×**Nx**

大規模計算には
SOR以外は不向き



最適なωは

・境界条件

・基礎方程式

・格子点数

に依存する。

（試行錯誤必要）

③SOR法(古典的反復法)

緩和係数の決定方法:

一般に、ωを解析的に決定することは難しい。

(参考)

固定境界(Dirichlet境界)を持つ場合:

$\omega \sim 2$ (ex,ω=1.99)

自由境界(Nuemann境界)のみを持つ場合:

$\omega \sim 1$ (ex,ω=1.2)