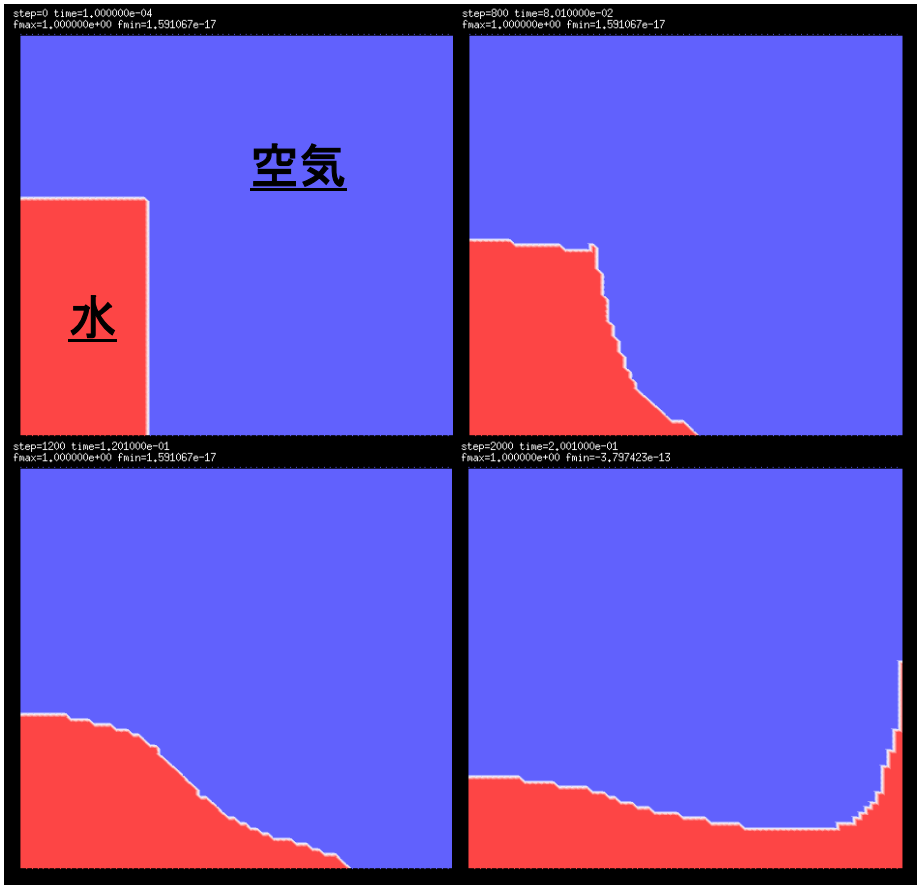
Projection法を用いた流体解析

例題

- **Projection法**を用いた液体・気体の混在する系についての数値解法
- 二次元
- ダムブレイク
- CIP法
- Fractional Step法



基礎方程式

従属変数: u, v : 流速、p: 圧力、ϕ: Color function

非圧縮性:
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{-(N-1)}$$

x方向運動方程式:
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu_m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu_m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{-(N-2)}$$

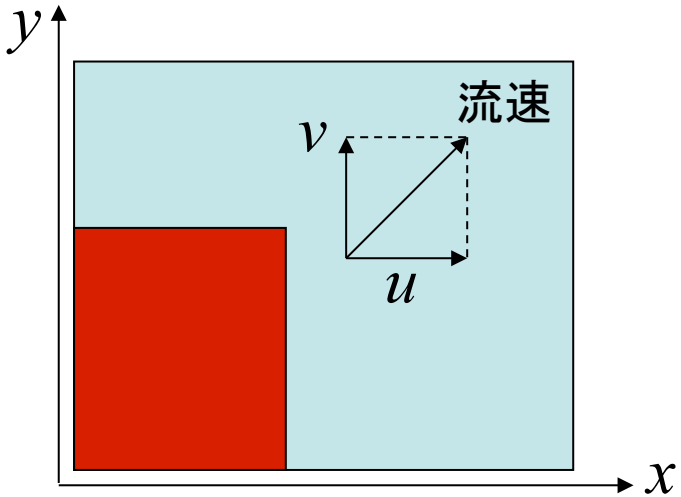
y方向運動方程式:
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu_m\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\nu_m\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-g \qquad \text{-(N-3)}$$

物質の移動の追跡:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \qquad \text{-(N-4)}$$

粘性項は定数として扱う;

ν_m : 分子動粘性項（旦 ⊗）$^{-6}[m^2/s]$

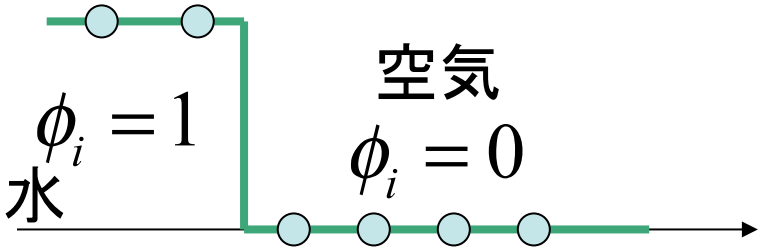
水20℃



物質界面の追跡

水面がどこにあるのか？
どこまでが水or空気？ ⇒ Color　functionを用いて行う。

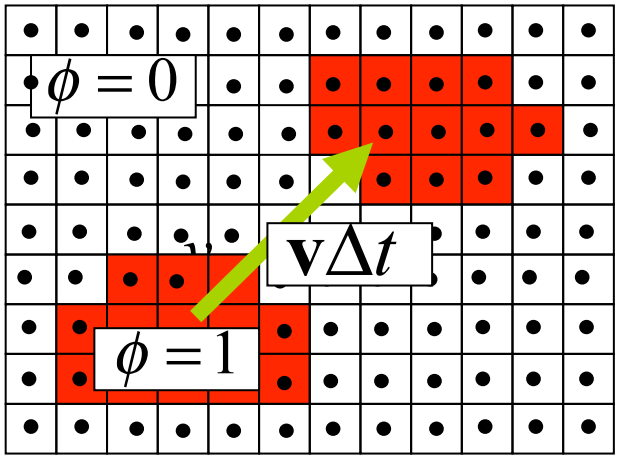
水の存在する領域: $\phi = 1$
空気の存在する領域: $\phi = 0$



水の領域は流速にしたがって
移動する: Φの時間変化

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad \text{-(N-4)}$$

移流方程式



Projection法における密度の見積もり方

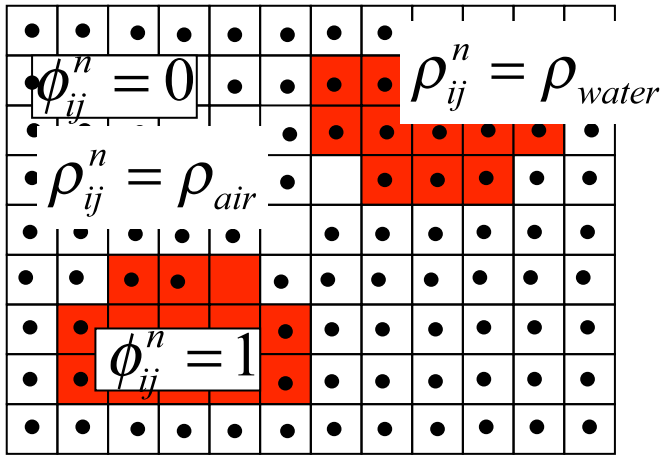
Projection法では、水or気体の両方とも非圧縮性を仮定する。

⇨ 水の密度: $\rho_{water} \cong 1\times10^3 [kg/m^3]$ 空気の密度: $\rho_{air} \cong 1[kg/m^3]$ 一定

Color Functionを用いて、

$$\rho_{ij}^n = \begin{cases} \rho_{water} & \text{if } \phi_{ij}^n > 0.5 \\ \rho_{air} & \text{if } \phi_{ij}^n \le 0.5 \end{cases} \quad \text{-(N-5)}$$

<u>Φ=0.5を水面として解釈</u>



計算領域・境界条件

計算領域:

$$(x, y): 0 \le x \le x_{\max} = 1, 0 \le y < y_{\max} = 1$$

境界条件:

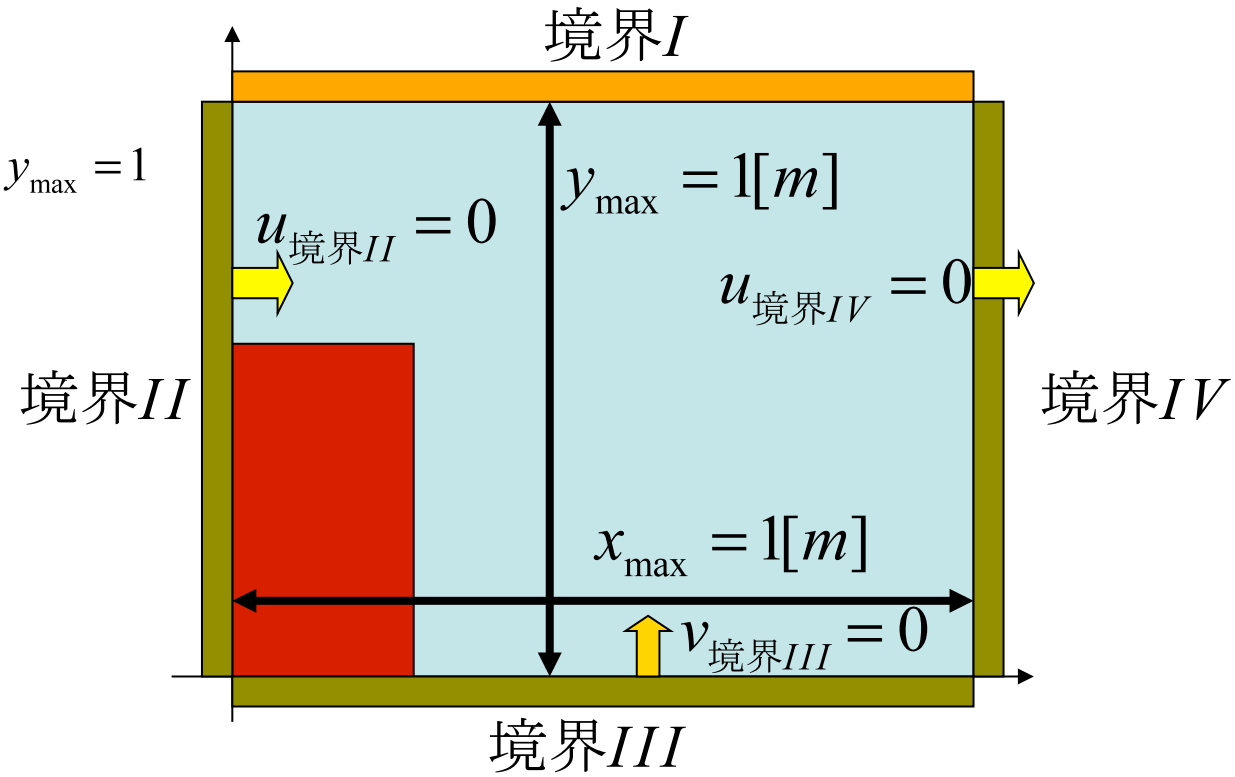
<u>境界I: 圧力境界(大気圧)</u>

$$p_{境界I} = const.(=0)$$

<u>境界II,III,IV:壁面境界</u>

$$u_{境界II} = u_{境界IV} = 0$$

$$v_{境界III} = 0$$



<u>容器内での運動を計算</u>

計算格子

等間隔直交格子

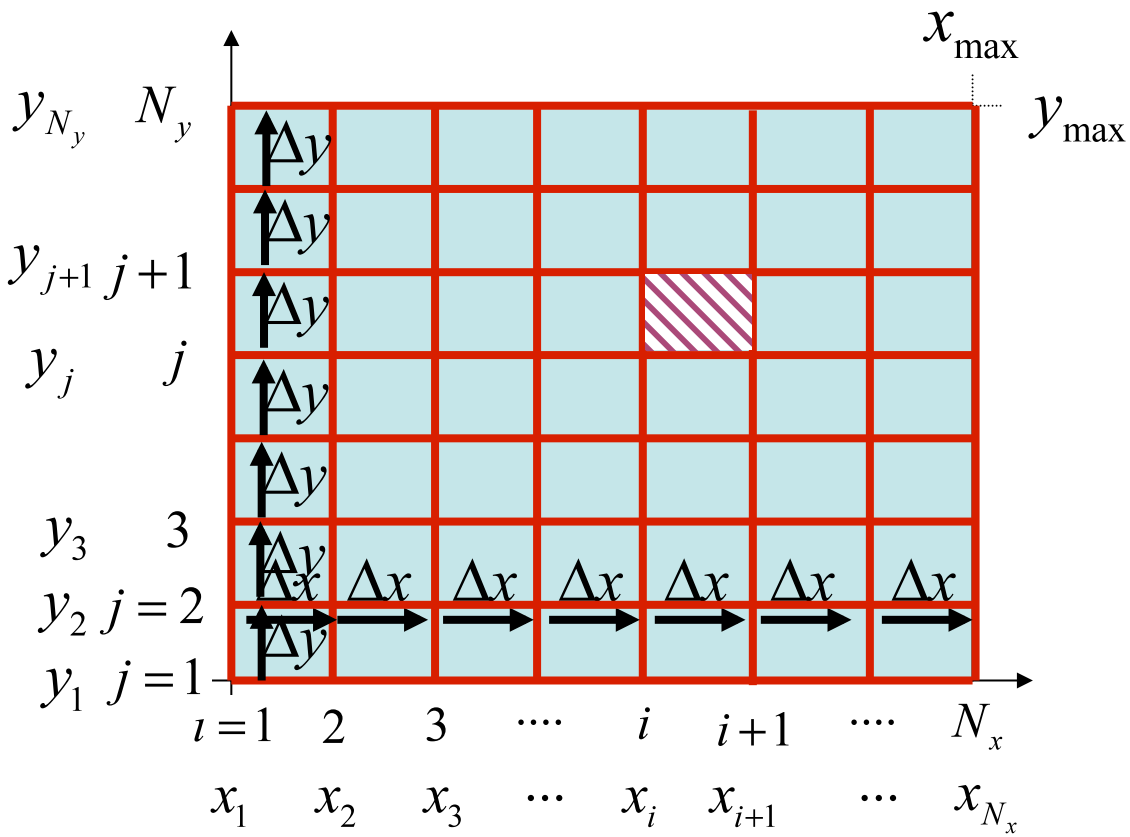
格子線：x方向Nx本、y方向Ny本

$$x_{\max} = \Delta x \times (N_x - 1) + x_1$$

$$\therefore \Delta x = \frac{x_{\max} - x_1}{(N_x - 1)} = \frac{x_{\max}}{(N_x - 1)}$$

格子線のx座標：

$$x_i = \Delta x \times (i - 1)$$



y方向：

$$\therefore \Delta y = \frac{y_{\max} - y_1}{(N_y - 1)} = \frac{y_{\max}}{(N_y - 1)}$$

格子線のy座標：　$y_j = \Delta y \times (j - 1)$

i,i+1,j,j+1の格子線に囲まれた領域（計算セル）での変数配置：
スタガード配置（食い違い格子）

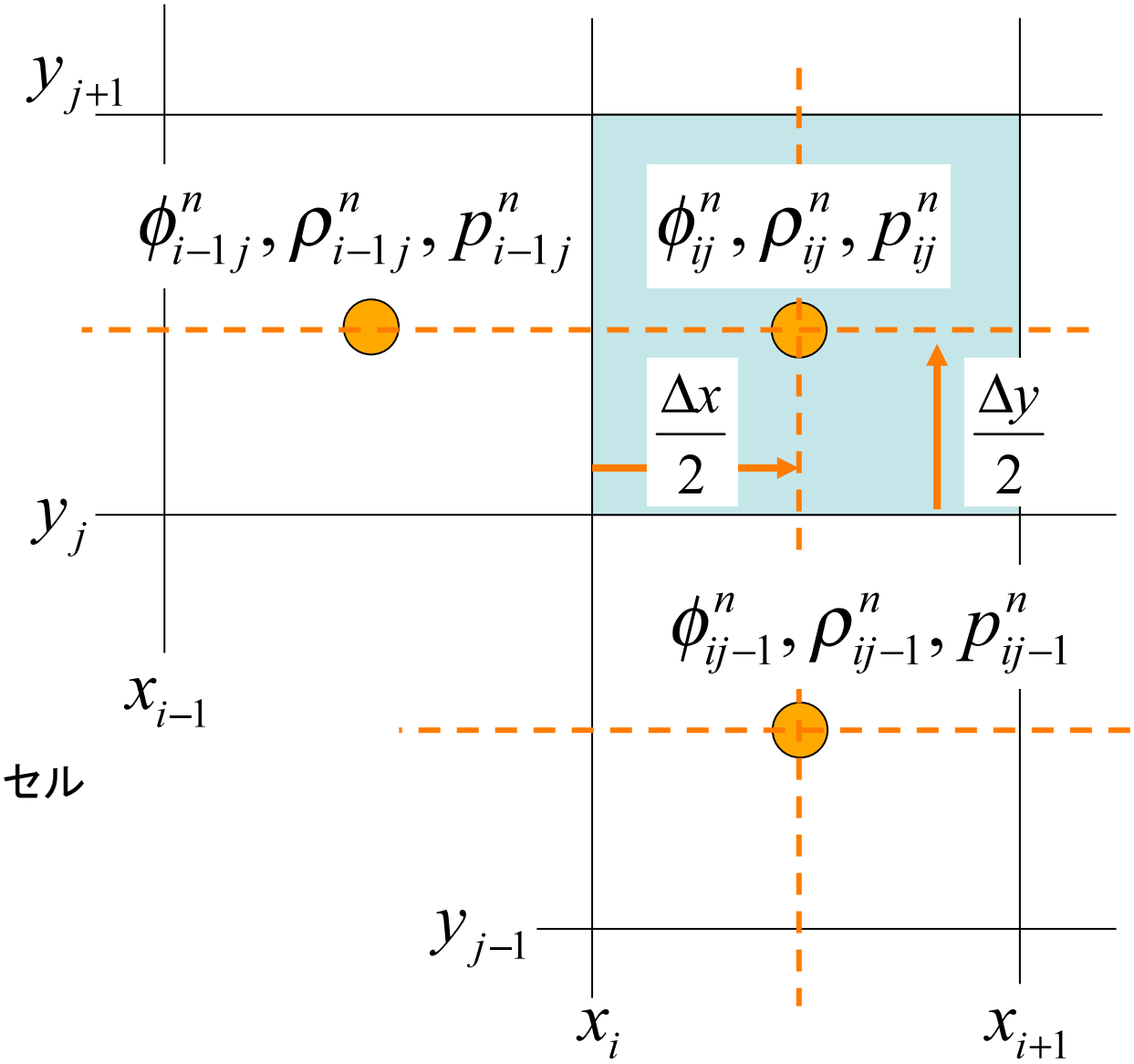
計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数により場所が異なる

Color Function:Φ
密度：ρ
圧力：p

⇩

格子セルの中心



i,i+1,j,j+1に囲まれる計算セルの値を

$$\phi_{ij}^n, \rho_{ij}^n, p_{ij}^n$$

とする。

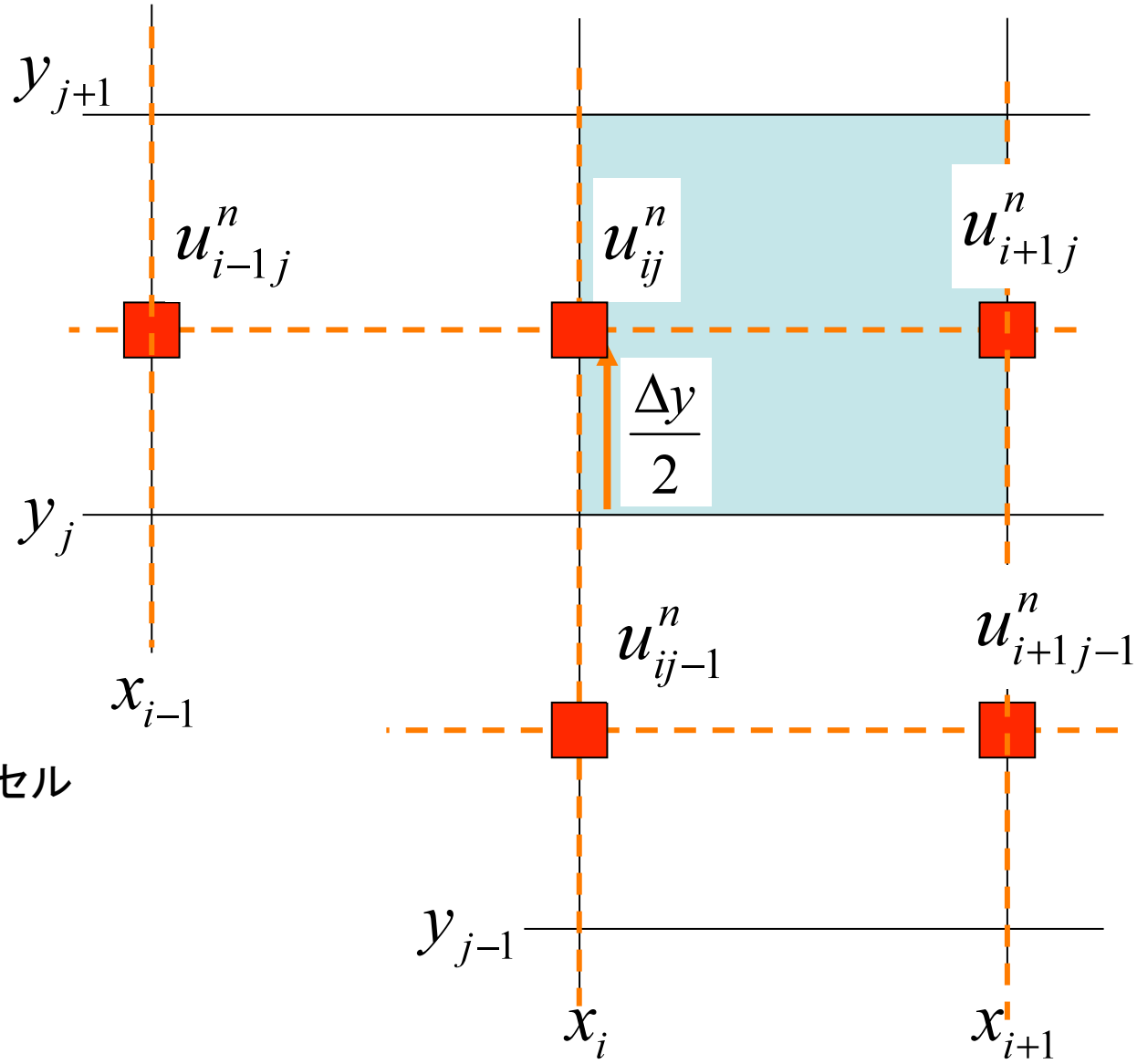
計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数により場所が異なる

X方向流速u

⇩

格子セルx方向
境界面
（y方向には中点）



i,i+1,j,j+1に囲まれる計算セル
のi軸上に位置する流速を

とする。 u^n_{ij}

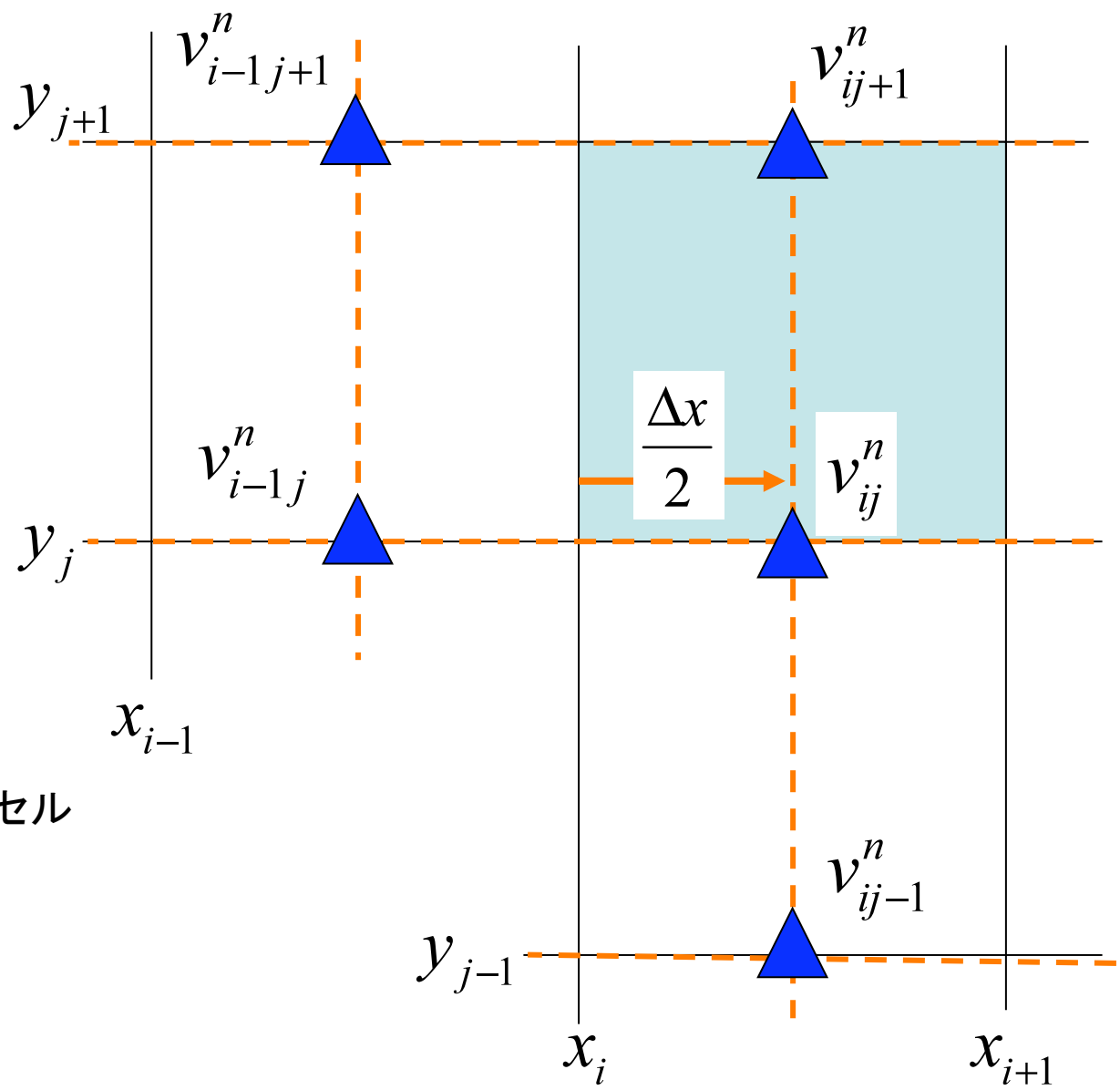
計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数により場所が異なる

y方向流速v

⇩

格子セルy方向
境界面
（x方向には中点）

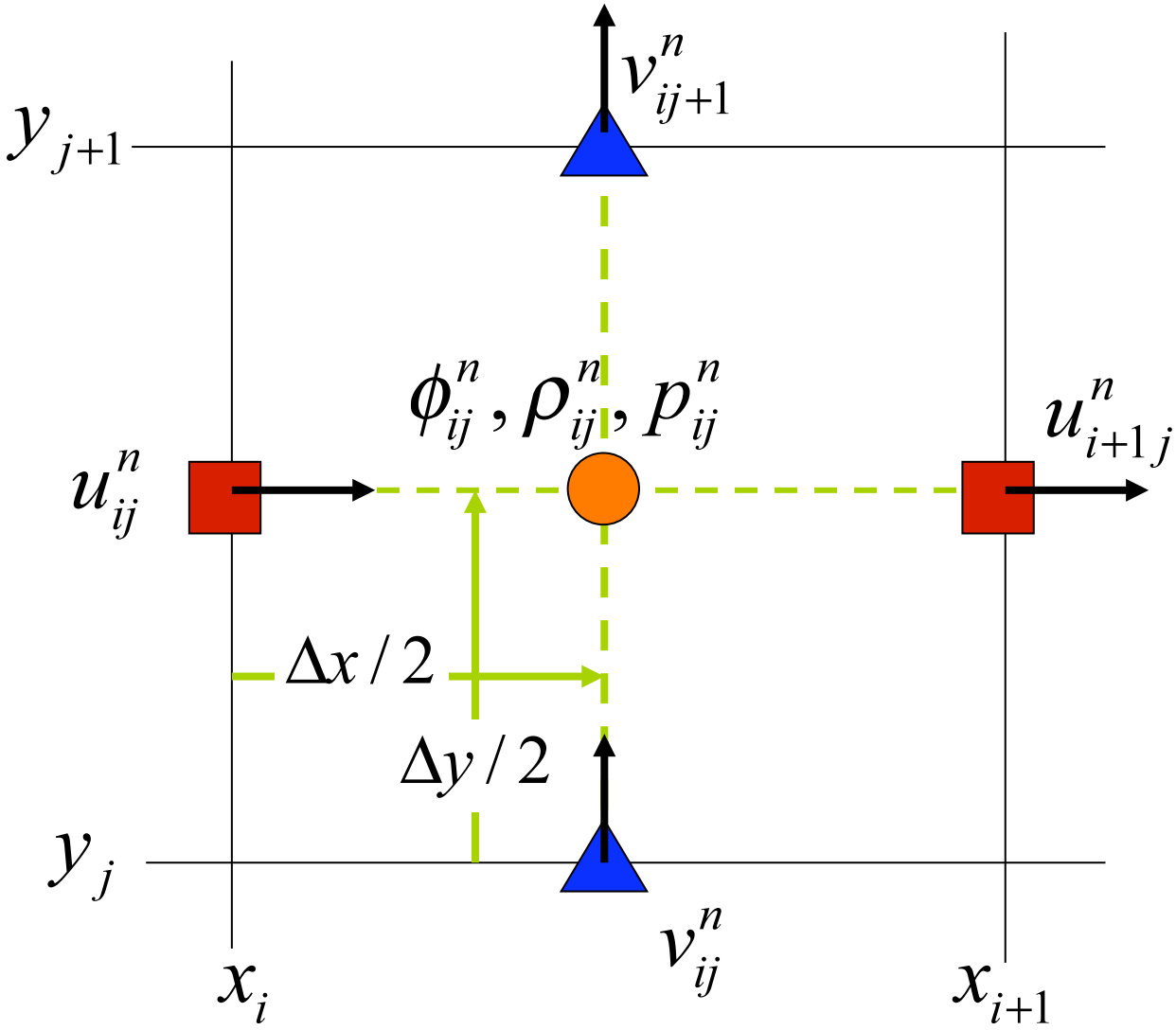


i,i+1,j,j+1に囲まれる計算セル
のj軸上に位置する流速を

とする。 v^n_{ij}

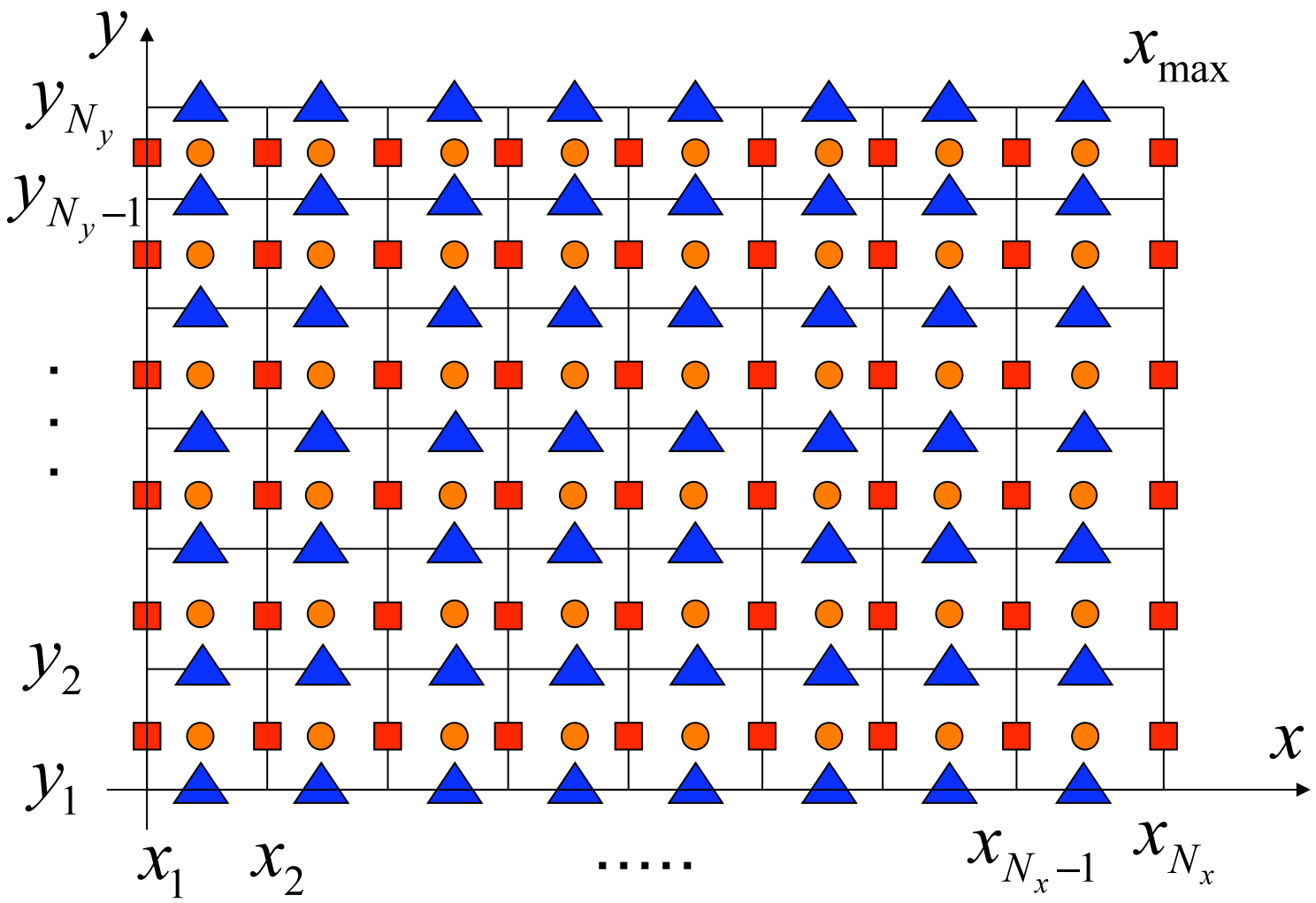
計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数により場所が異なる



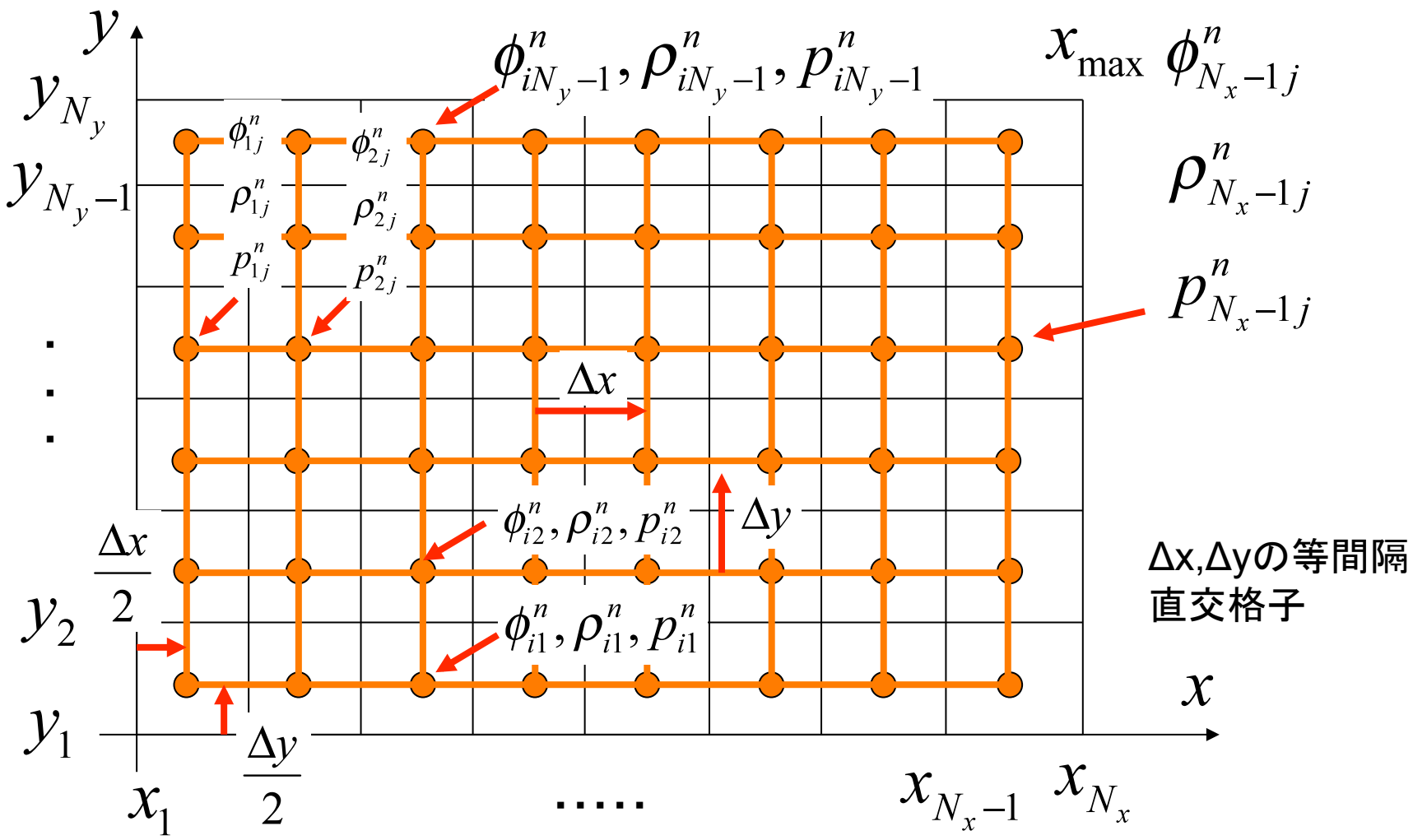
計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数ごとに同じ格子が書ける



計算セル内での変数配置：スタガード配置

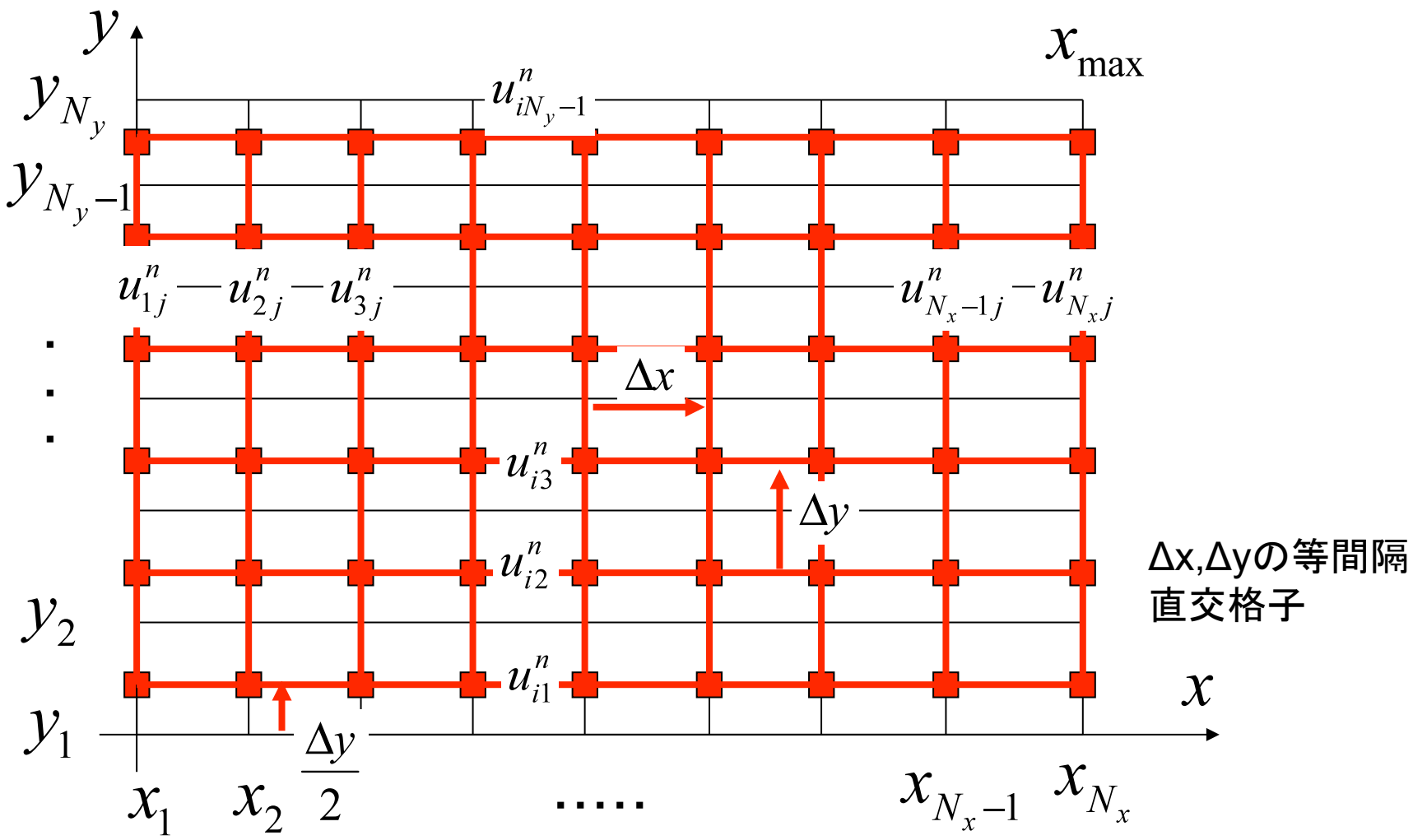
変数ごとに同じ格子が書ける⇒計算方法は同じ



計算対象は $i = 1, 2, \ldots, N_x - 1 \quad j = 1, 2, \ldots, N_y - 1$ の(Nx-1)×(Ny-1)個の点

計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数ごとに同じ格子が書ける

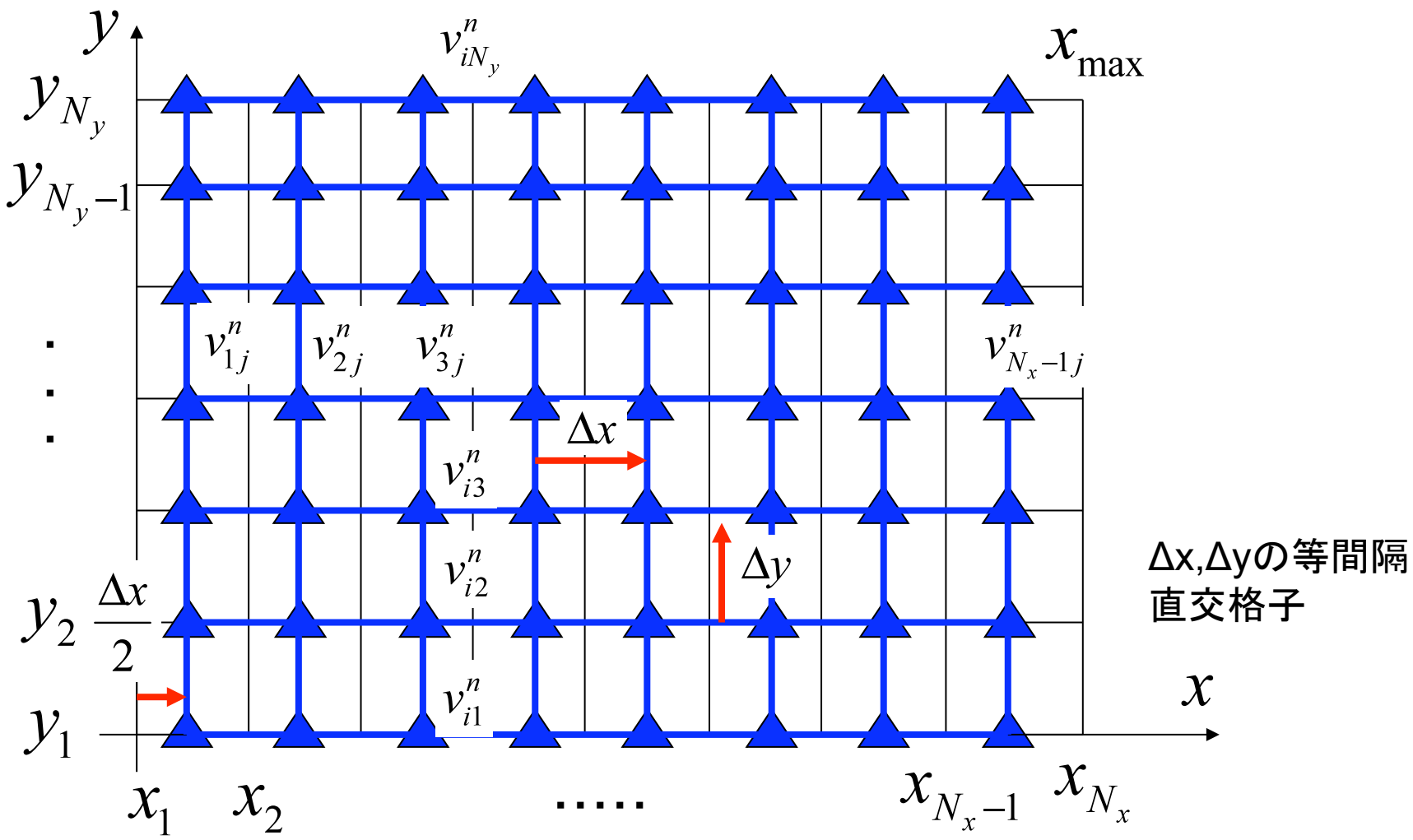


Δx,Δyの等間隔
直交格子

計算対象は　$i=1,2,\ldots,N_x$　$j=1,2,\ldots,N_y-1$　のNx×(Ny-1)個の点

計算セル内での変数配置：スタガード配置

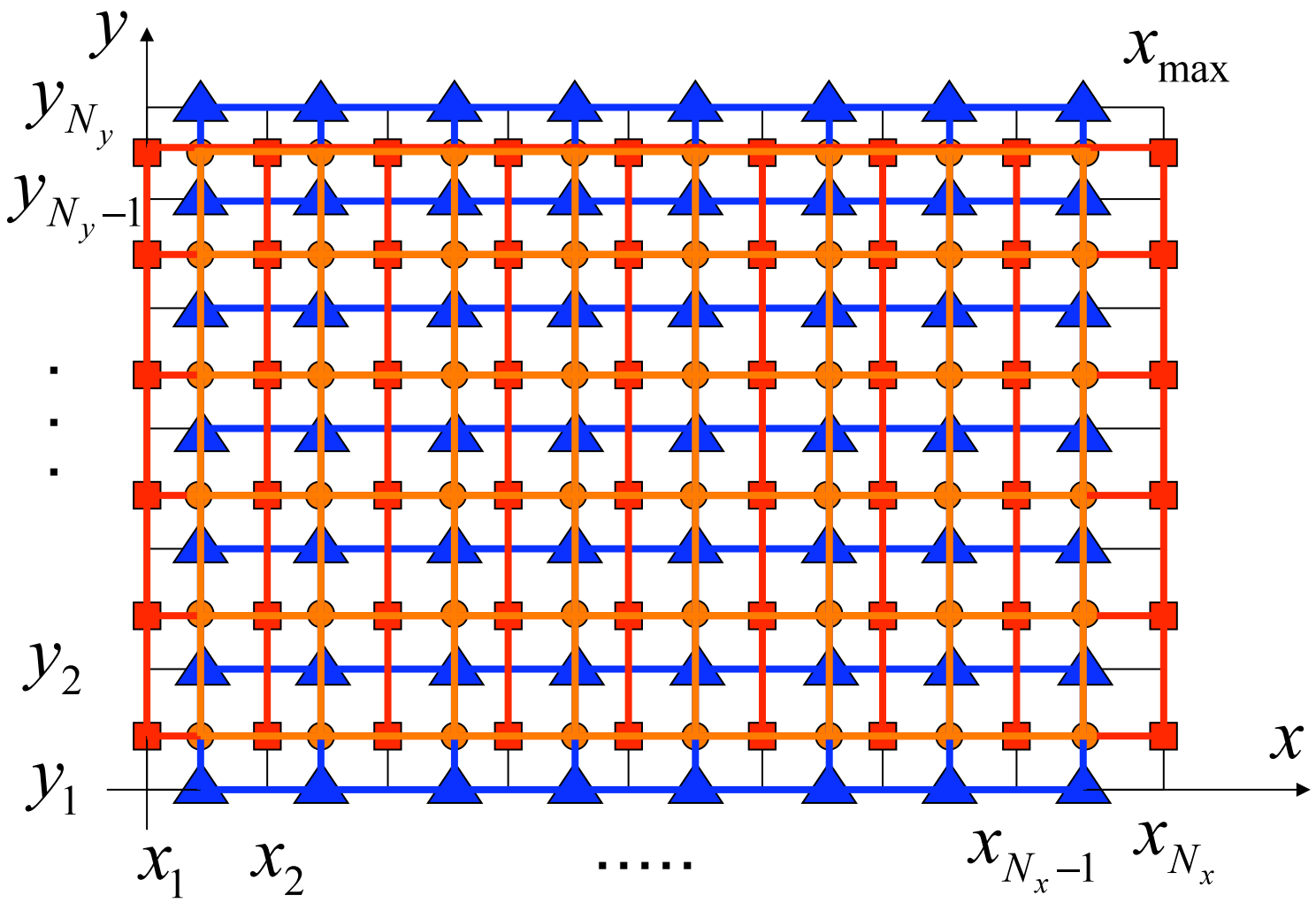
変数ごとに同じ格子が書ける



計算対象は $i=1,2,\ldots,N_x-1$ $j=1,2,\ldots,N_y$ の(Nx-1)×Ny個の点

計算セル内での変数配置：スタガード配置

変数ごとに同じ格子が書ける



変数の範囲（個数）が異なるだけで、同じ幅の等間隔格子
⇒計算手順は夫々の格子上で同じになる。

Projection法による計算手順

基礎方程式（混合型PDE）:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu_m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu_m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu_m\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\nu_m\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-g$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}=0$$

<u>Fractional Step手法:</u>

方程式を物理過程ごとに分割し、各々の方程式を順番に独立して計算する。

⇨ 時間1次精度　But　取り扱いは簡単

Fractional Stepによる分割解法

Step1：移流相 （対流方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \text{-(N-6)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{-(N-7)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \qquad \text{-(N-8)}$$

上記対流方程式をCIP法などで解き、

Δt経った仮の解 $u_{ij}^{A}, v_{ij}^{A}, \phi_{ij}^{A}$

を

$u_{ij}^{n}, v_{ij}^{n}, \phi_{ij}^{n}$ から計算する。

Fractional Stepによる分割解法

Step2：非移流相 （拡散方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{-(N-9)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - g \qquad \text{-(N-10)}$$

上記拡散方程式を差分法で解き、

移流相の仮の解 u_{ij}^A, v_{ij}^A

から**Δt**経った

非移流相の仮の解 u_{ij}^B, v_{ij}^B を計算する。

Fractional Stepによる分割解法

Step3：圧力修正相 （Poisson方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{-(N-11)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \text{-(N-12)}$$

上記拡散方程式を差分法で解き、

非移流相の仮の解 u_{ij}^{B}, v_{ij}^{B}

から**Δt**経った

真の解 $u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}$ を計算する。

圧力場の計算

Step3：圧力修正相 （Poisson方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

圧力p?

非圧縮条件式 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ を用いて圧力に対する方程式を導く。

次の時刻t_{n+1}での流速が非圧縮条件式を満たしていると仮定すれば、

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0 \qquad \text{-(N-13)}$$

一方、圧力修正相の計算を以下のようにするとすれば、

$$\frac{u^{n+1} - u^{B}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^{n+1}}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \qquad \frac{v^{n+1} - v^{B}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^{n+1}}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y}$$

圧力場の計算

$$u^{n+1} = u^B - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \quad \text{-(N-14)} \qquad v^{n+1} = v^B - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \quad \text{-(N-15)}$$

(N-13)にこれを代入して、

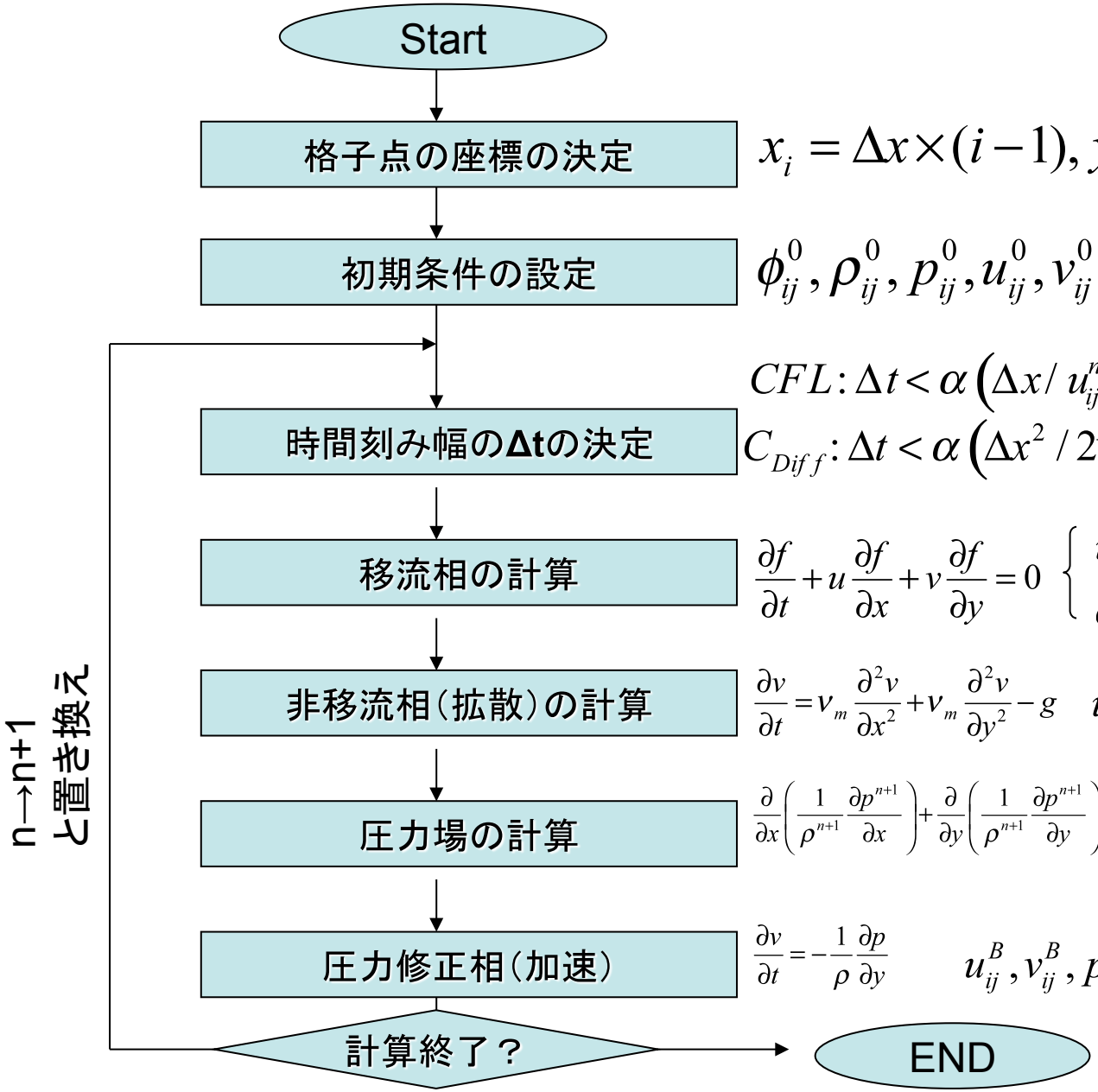
$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(u^B - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^B - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \right) = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial u^B}{\partial x} + \frac{\partial v^B}{\partial y} \right) \quad \text{-(N-16)}$$

次時刻の圧力p^{n+1}に対するPoisson方程式

(N-16)をSOR法等を用いて解き、圧力を推定する。

Projection法による計算手順



$$x_i = \Delta x \times (i-1),\ y_j = \Delta y \times (j-1)$$

$$\phi_{ij}^0, \rho_{ij}^0, p_{ij}^0, u_{ij}^0, v_{ij}^0$$

$$CFL: \Delta t < \alpha\left(\Delta x / u_{ij}^n\right) \quad and \quad \Delta t < \alpha\left(\Delta y / v_{ij}^n\right)$$

$$C_{Diff}: \Delta t < \alpha\left(\Delta x^2 / 2\nu_m\right) \quad and \quad \Delta t < \alpha\left(\Delta y^2 / 2\nu_m\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} u_{ij}^n, v_{ij}^n \Rightarrow \text{仮の解：} u_{ij}^A, v_{ij}^A \\ \phi_{ij}^n \Rightarrow \text{真の解：} \phi_{ij}^{n+1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - g \quad u_{ij}^A, v_{ij}^A \Rightarrow \text{仮の解：} u_{ij}^B, v_{ij}^B$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y}\right) = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial u^B}{\partial x} + \frac{\partial v^B}{\partial y}\right) \quad u_{ij}^B, v_{ij}^B \Rightarrow \text{圧力：} p_{ij}^{n+1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad u_{ij}^B, v_{ij}^B, p_{ij}^{n+1} \Rightarrow \text{真の解：} u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}$$