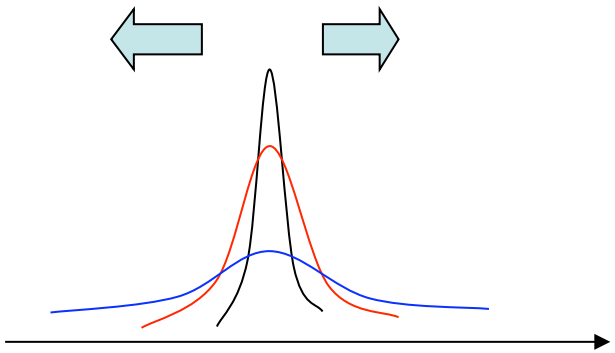
放物型方程式の解法

放物型方程式

拡散方程式: $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

ν : 拡散係数(＞0)



物質の拡散現象

①陽解法:νが小さい場合
　　空間中心差分＋時間前進差分
②陰解法:νが大きい場合
　　空間中心差分＋時間後退差分

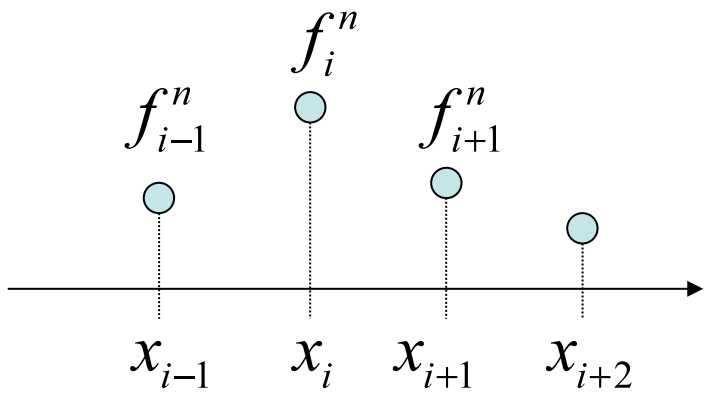
放物型方程式

1次元拡散方程式:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

ν : 拡散係数(>0)

①陽解法:空間中心差分+時間前進差分



時間前進差分:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n = \left(\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n$$

空間中心差分:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

計算式:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\therefore f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

放物型方程式

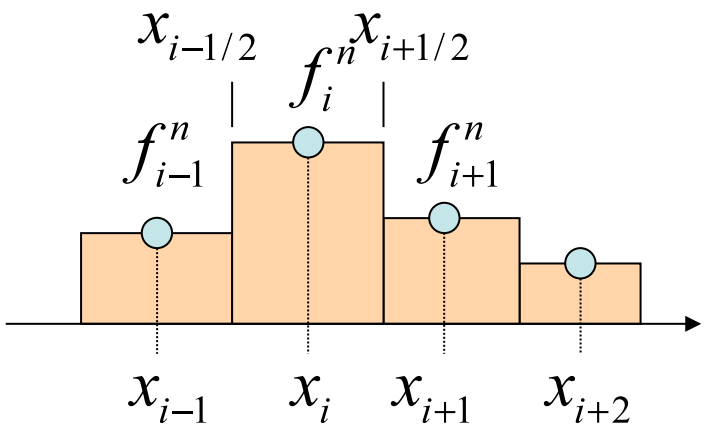
①陽解法：空間中心差分＋時間前進差分

計算式：
$$f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

計算式（フラックス表示）：

$$f_i^{n+1}\Delta x = f_i^n \Delta x + \left(F_{i-\frac{1}{2}}^n - F_{i+\frac{1}{2}}^n\right)$$

$$\begin{cases} F_{i-\frac{1}{2}}^n = -\dfrac{\nu \Delta t}{\Delta x}\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right) \\ F_{i+\frac{1}{2}}^n = -\dfrac{\nu \Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) \end{cases}$$



区間 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ （コントロールボリューム）を考える。

$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, $x_{i-1/2}$ 点 $\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$: 中

放物型方程式

①陽解法：空間中心差分＋時間前進差分

計算式（フラックス表示）：

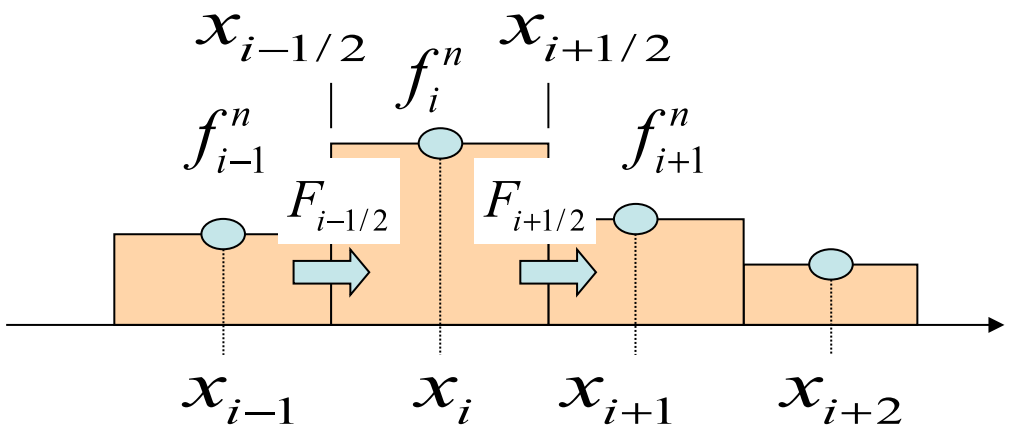
$$f_i^{n+1}\Delta x = f_i^n \Delta x + \left(F^n_{i-\frac{1}{2}} - F^n_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

$f_i \ \Delta x$ ：コントロールボリュームに含まれる質量
（f_iを区間平均値と考える）

$F^n_{i+1/2}$ ：境界面　$x_{i+1/2}$をΔt間に通過する質量（x方向正）

$F^n_{i-1/2}$ ：境界面　$x_{i-1/2}$をΔt間に通過する質量

を表している。



放物型方程式

①陽解法：空間中心差分＋時間前進差分

計算式（フラックス表示）：

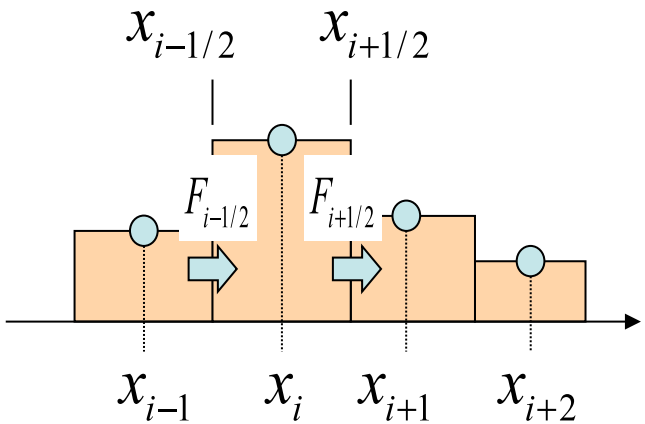
$$f_i^{n+1}\Delta x = f_i^n \Delta x + \left(F^n_{i-\frac{1}{2}} - \boxed{F^n_{i+\frac{1}{2}}} \right) \qquad 区間[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$$

$$f_{i+1}^{n+1}\Delta x = f_{i+1}^n \Delta x + \left(\boxed{F^n_{i+\frac{1}{2}}} - F^n_{i+\frac{3}{2}} \right) \qquad 区間[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}]$$

区間　$[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$（コントロールボリューム）から流出による減少分：　$F^n_{i+1/2}$

区間　$[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}]$（コントロールボリューム）への流入による増加分：　$F^n_{i+1/2}$

質量　$F^n_{i+1/2}$ をxiの区間からxi+1の区間に移しているだけ
⇒質量の総和は保存される。

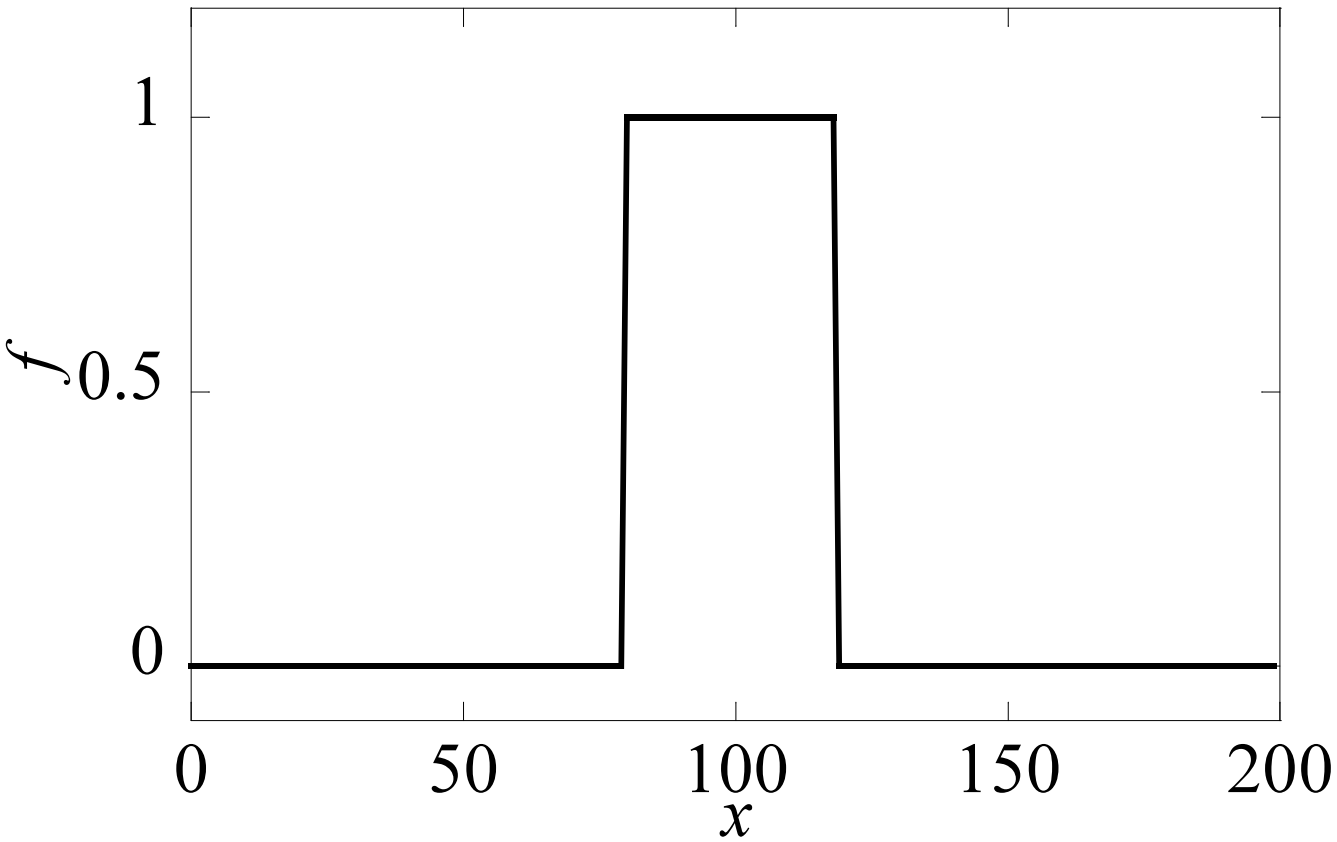


$$\sum_i f_i^{n+1}\Delta x = \sum_i f_i^n \Delta x$$

計算例題

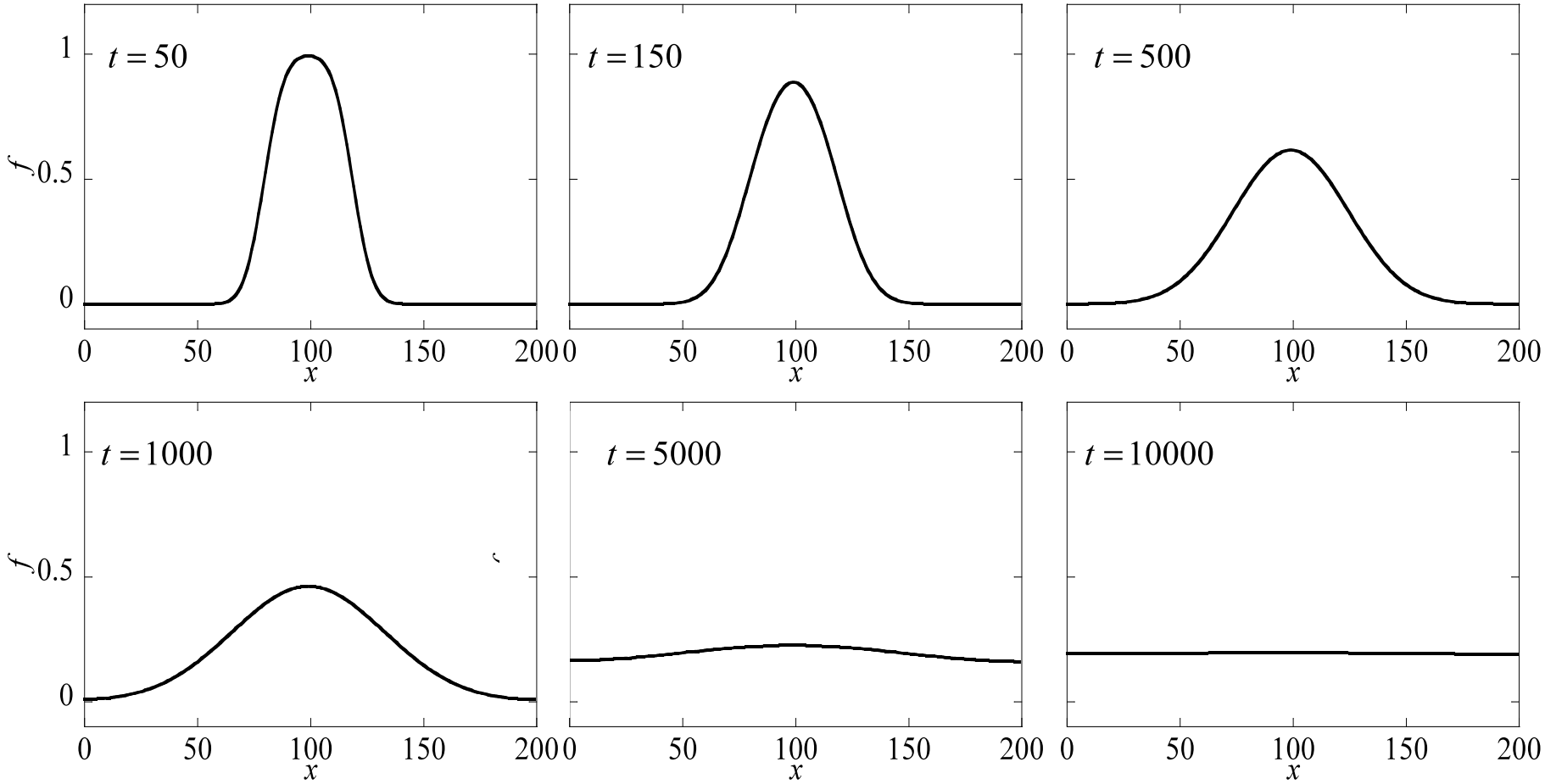
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \nu = 0.5 \qquad N = 200, \quad \Delta x = 1.0, \quad \Delta t = 0.1$$

初期条件：中心40格子点のみ1、それ以外0



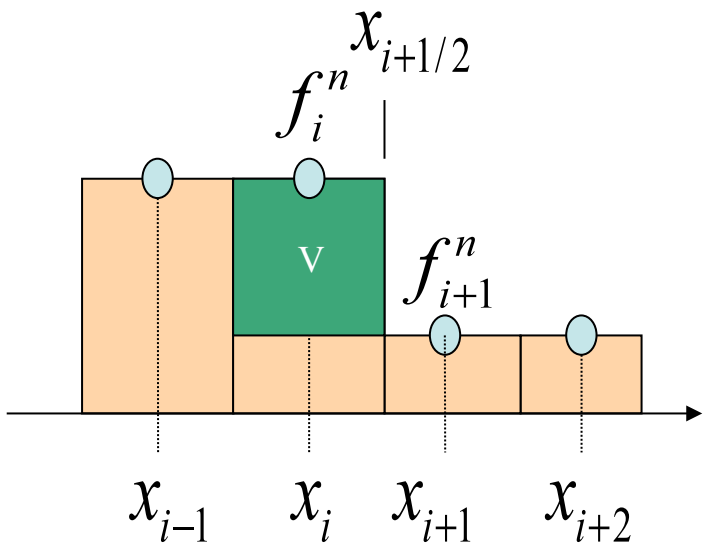
計算結果

$$\Delta t = 0.1 \qquad (C_{Diff} = 0.1)$$



放物型方程式

①陽解法：空間中心差分＋時間前進差分



安定性の条件

$f_i^n = f_{i-1}^n$ の場合を考えると

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = -\frac{\nu\Delta t}{\Delta x}\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right) = 0$$

区間xiの変化は

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = -\frac{\nu\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right)$$

を通じてのみ行われる。

今、区間xiとxi+1での質量の差Vを見積もると、

$$V = \Delta x f_i^n - \Delta x f_{i+1}^n = -\Delta x\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right)$$

即ち、

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\times\left[-\Delta x\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right)\right] = C_{Diff}\times V$$

$$C_{Diff} = \left(\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right)$$

：隣接する区間の質量差に対する移動する質量の割合

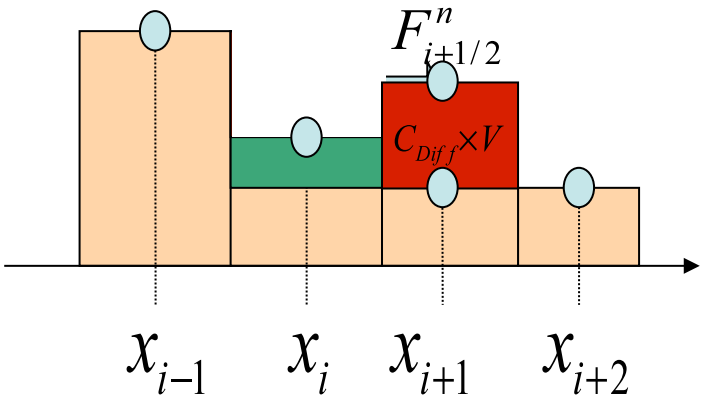
放物型方程式

①陽解法：空間中心差分＋時間前進差分

安定性の条件

拡散：
密度の高い領域⇒低い領域　への１方向移動

C_{Diff}がある程度大きい場合：



拡散後に隣の区間の方が大きい値を持つ！
（拡散の現象と矛盾している。）

数値振動誤差（計算不安定）の原因

放物型方程式

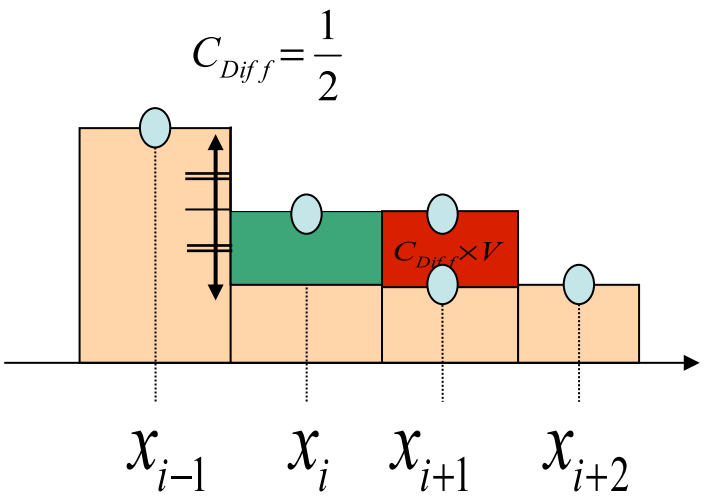
①陽解法：空間中心差分＋時間前進差分

安定性の条件

C_{diff}の上限：

$$C_{Diff} = \left(\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

移動する量は質量差の50%まで



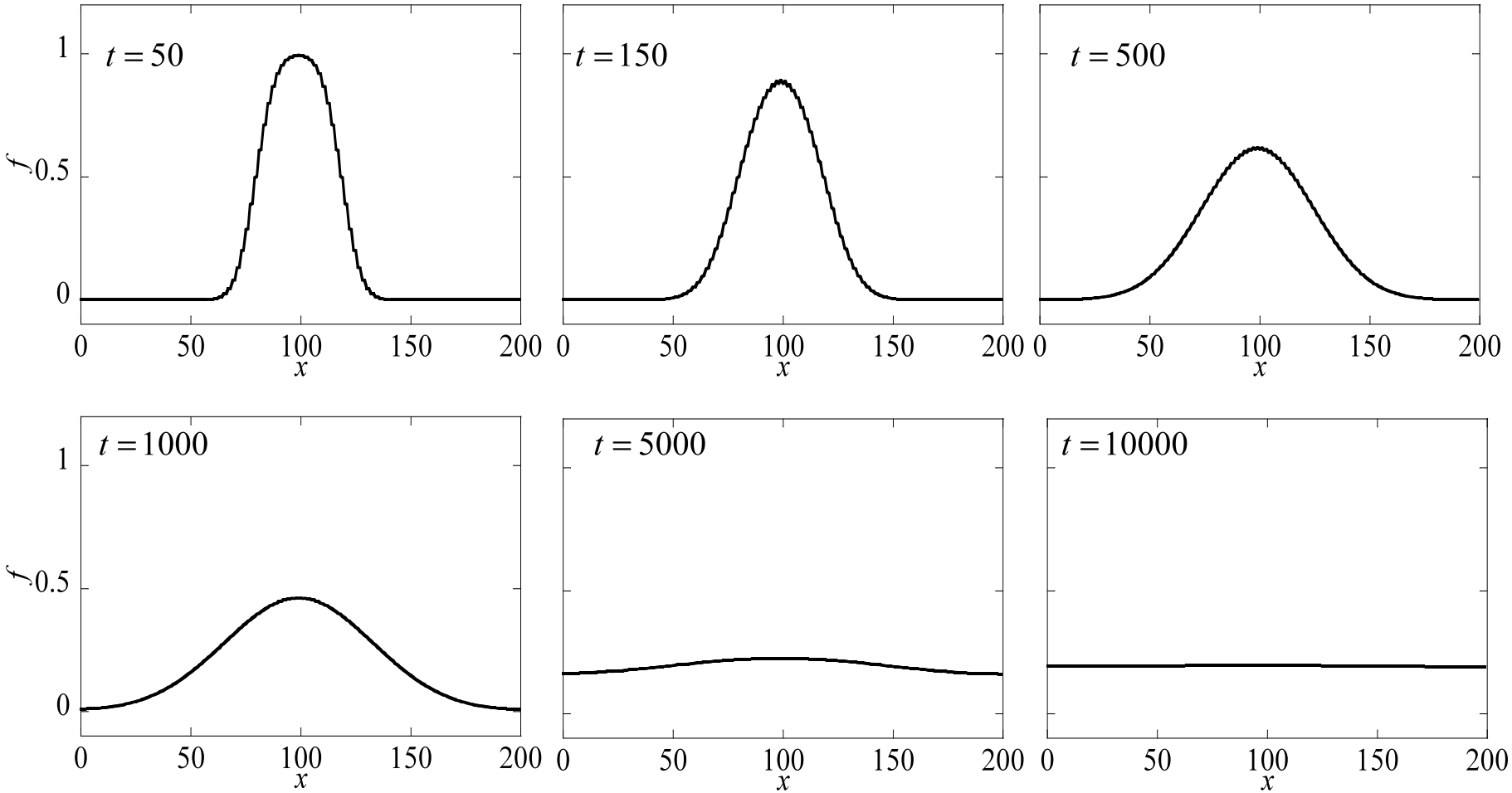
実際には、条件式をΔtについて整理し、

$$\Delta t < \alpha \frac{\nu}{2\Delta x^2} \qquad \alpha : 安全係数 (0 < \alpha < 1)$$

を満足するようにΔtを決定する。

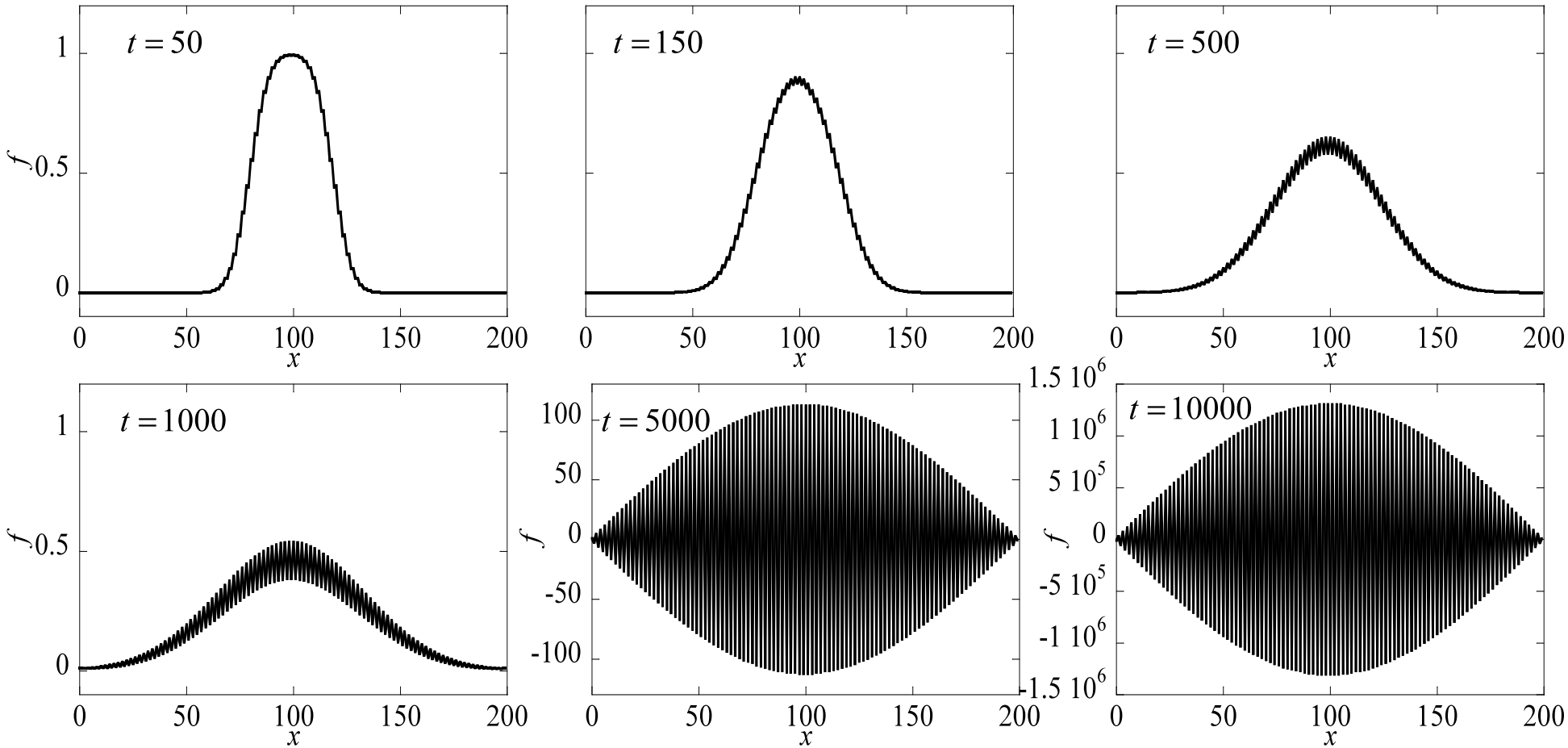
計算結果

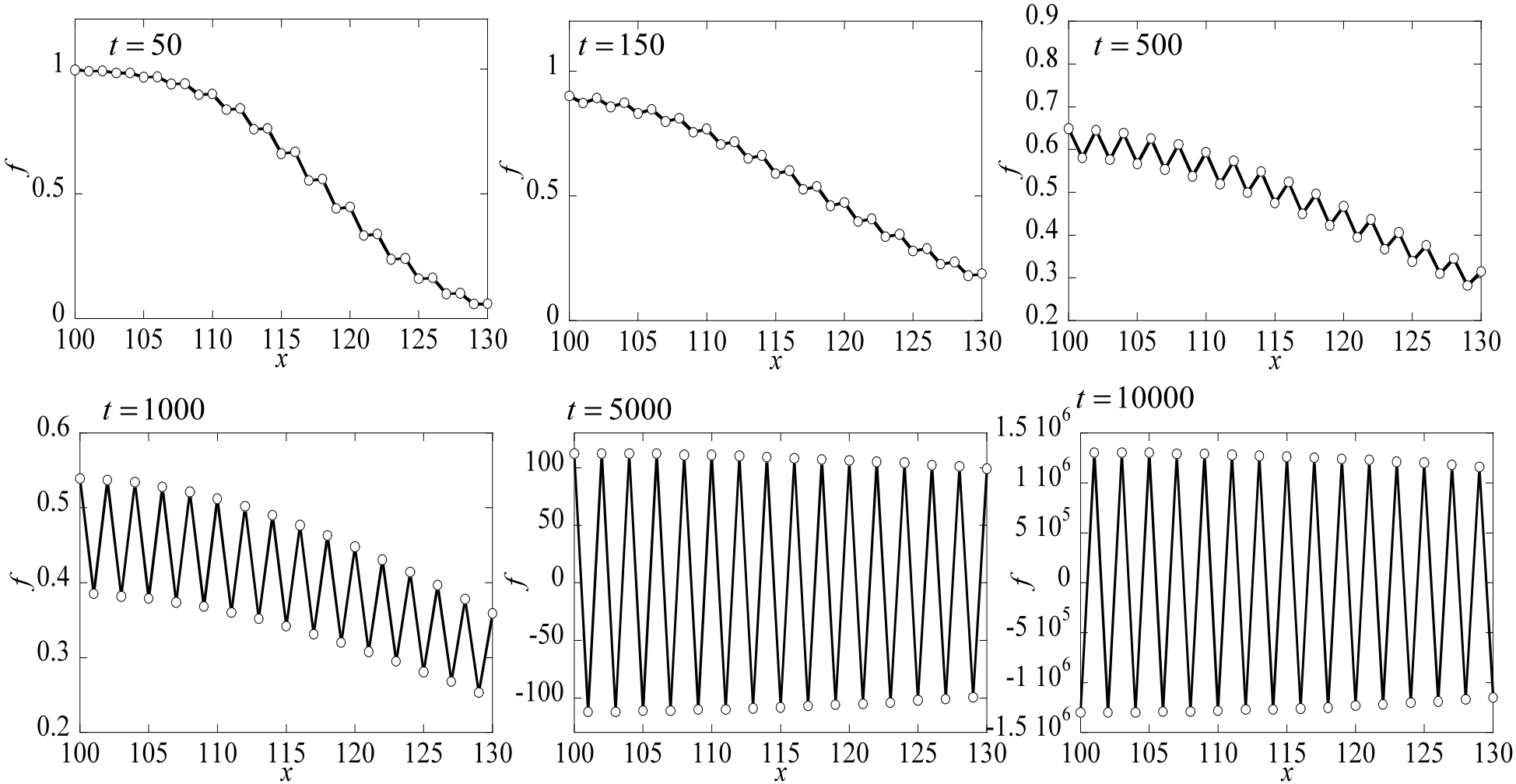
$$\Delta t = 0.999 \qquad (C_{Diff} = 0.999)$$



計算結果

$$\Delta t = 1.001 \qquad (C_{Diff} = 1.001)$$



計算結果

$$\Delta t = 1.001 \qquad (C_{Diff} = 1.001)$$