微分方程式の基礎の復習

問題の設定

- 工学・物理学で取り扱う問題
  ⇒　微分方程式＋付帯条件

ex). Navier-Stokes(流体方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u$$

流速の時間変化を記述

＋

$$u(t=a,x,y,z)=f(x,y,z)$$

ある時刻における流速
はどうであったか？

付帯条件

問題の設定ー2

- 付帯条件

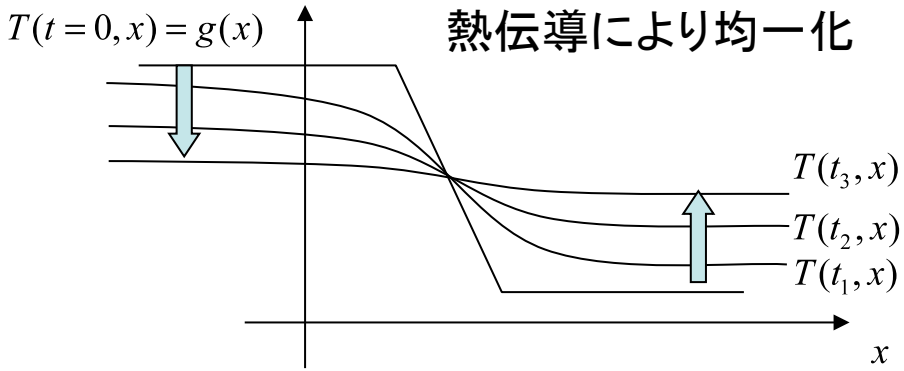
  (1): 初期値問題

  ある時刻t=aにおける状態を与え、その初期値を出発値として、それ以後の時間変化を微分方程式に基づき計算する。

問題の設定ー3

Ex). 熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



初期条件：時刻t=0における温度分布

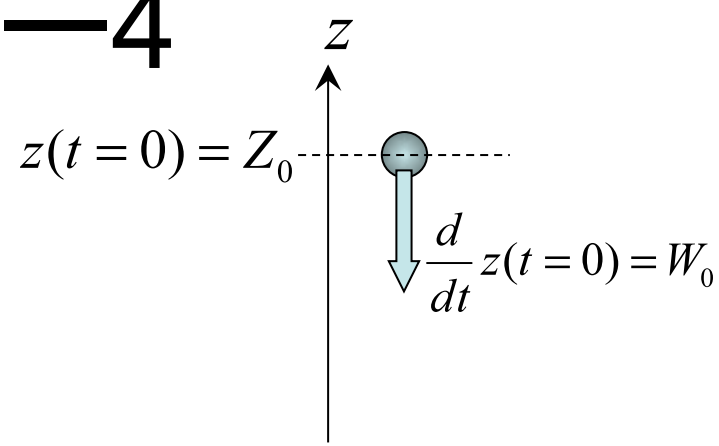
$$T(t=0,x)=g(x)$$

初期値問題（Initial Value Problem)

※ただしこの問題では境界面での温度が重要なので、境界値問題でもある。

問題の設定ー4

Ex). （重力）運動方程式



$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-g$$

初期条件：時刻t=0における物体の位置　$z(t=0)=Z_0$

＋

時刻t=0における物体の初速度

$$w(t=0)=\frac{d}{dt}z(t=0)=W_0$$

微分（勾配）の情報も初期条件として与えなければならない場合

⇒ **<u>Cauchy問題</u>**

問題の設定ー5

- 付帯条件

  (2): 境界値問題

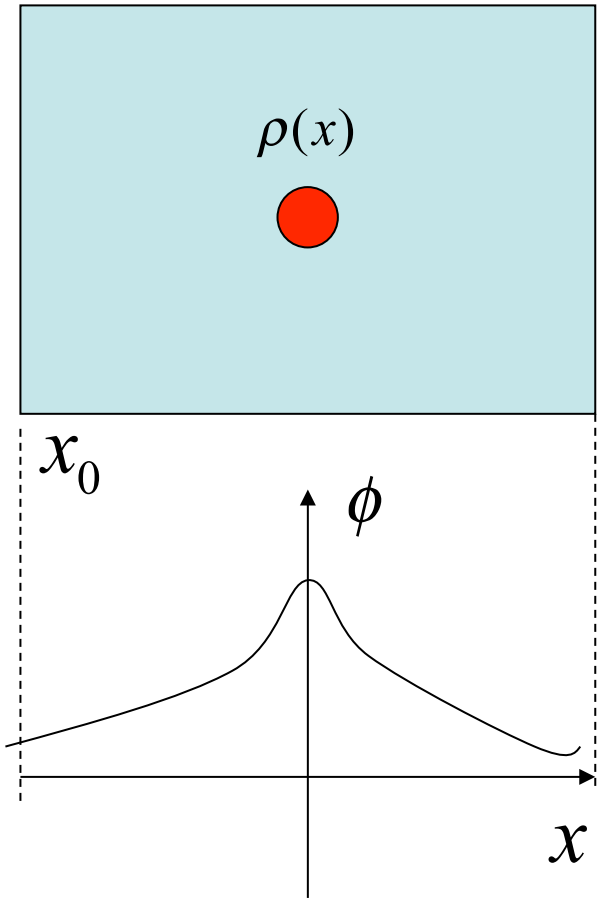
  時間依存しない微分方程式で付帯条件が空間領域の境界上で与えられるもの。

問題の設定ー6

Ex). 静電場(電位Φ、電荷ρ)

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon}$$

境界 x_0 上の条件で電位は左右される。

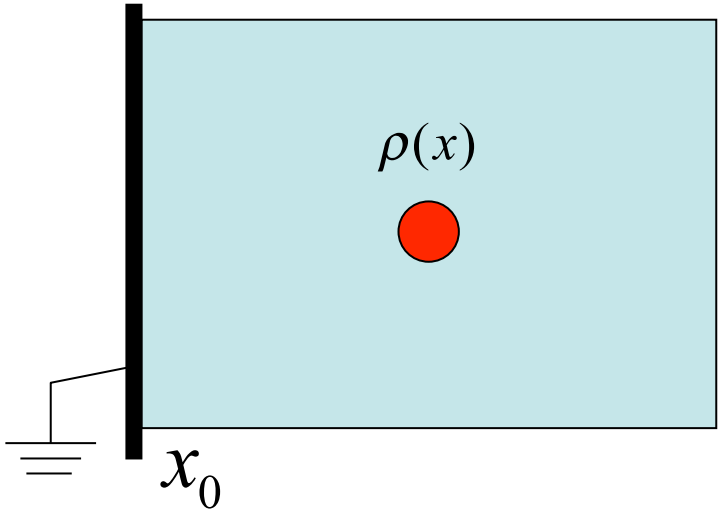


問題の設定ー7

境界 x_0 で接地。 ⇒ $\phi(x = x_0) = 0$

境界の条件が“Φ=定数”の形で指定される

（Dirichlet 条件）



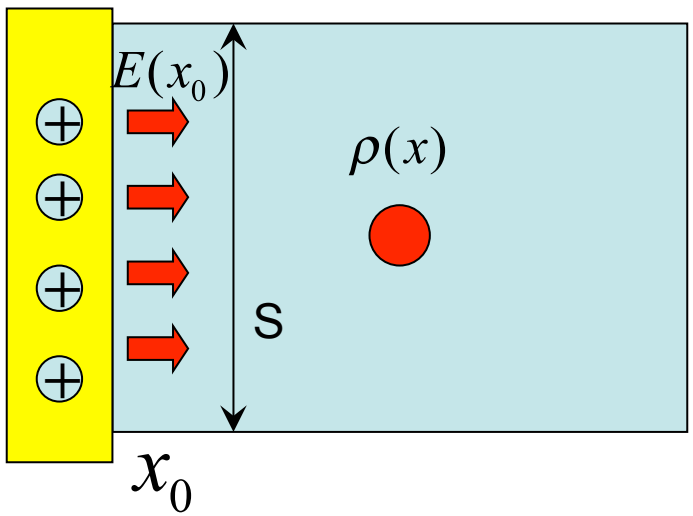
境界 x_0 が帯電 ⇒ $E(x_0)S = \rho_{壁}$

$\therefore E(x_0) = \rho_{壁} / S$

$E = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ だから、 $\dfrac{\partial \phi(x_0)}{\partial x} = \rho_{壁} / S$

境界の条件が“dΦ/dx=定数”の形で指定される

（Nuemann 条件）



微分方程式の分類

- 線形or非線形

未知関数の非線形項を含む場合：非線形

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\underline{\underline{u\frac{\partial u}{\partial x}}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$ （流体方程式）

- 同次or非同次

主に線形方程式で熱源や外力などの既知関数項を含まない場合：同次

Laplace方程式（同次）：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$

Poisson方程式（非同次）：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\underline{\underline{\rho(x,y)}}$

- 微分階数

微分方程式の最高微分階数

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\rho(x,y)$$ （2階変微分方程式）

- <u>特性曲線に基づく分類</u>

微分方程式の分類－２

•**特性曲線に基づく分類—2階線形偏微分方程式**

簡単のため２変数(t,x)を考えると、２階線形PDEの一般形は

$$A\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_{(x,t)}+2B\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}f_{(x,t)}+C\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_{(x,t)}+D\frac{\partial}{\partial t}f_{(x,t)}+E\frac{\partial}{\partial x}f_{(x,t)}+Ff_{(x,t)}=g_{(t,x)}$$

A,B,C,D,E,F : 実定数、 $g_{(t,x)}$: 与えられる関数

$a):B^2-AC<0$ ⇒ 楕円型(Elliptic)

$b):B^2-AC=0$ ⇒ 放物型(Parabolic)

$c):B^2-AC>0$ ⇒ 双曲型(Hyperbolic)

と方程式を分類

微分方程式の分類ー特性曲線

- **特性曲線に基づく分類の意味**

簡単のためD=E=F=g(t,x)=0の場合を考える。

$$A\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_{(x,t)}+2B\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}f_{(x,t)}+C\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_{(x,t)}=0$$

今、解が $f(t,x)=e^{\alpha x}e^{\beta t}$ の形で与えられると仮定（**α**、**β**：定数）

$$\left(A\beta^2+2B\alpha\beta+C\alpha^2\right)e^{\alpha t}e^{\beta x}=0$$

α、βの条件式（特性方程式）：

$$\therefore\left(A\beta^2+2B\alpha\beta+C\alpha^2\right)=0$$

微分方程式の分類－双曲型

$c): B^2 - AC > 0$ 双曲型(Hyperbolic)の場合

因数分解（単根の場合） $\Rightarrow (\beta - \mathrm{K}_{-}\alpha)(\beta - \mathrm{K}_{+}\alpha) = 0$

但し: $\mathrm{K}_{-} = \dfrac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \mathrm{K}_{+} = \dfrac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$

$$\boxed{\mathrm{K}_{\pm} \in \text{実数}}$$

$(\beta - \mathrm{K}_{-}\alpha)(\beta - \mathrm{K}_{+}\alpha) = 0 \Rightarrow$

$\beta = \mathrm{K}_{-}\alpha \ \text{ or } \ \mathrm{K}_{+}\alpha$

特に $B = 0$ の場合

$\beta = +C\alpha \ \text{ or } \ -C\alpha$

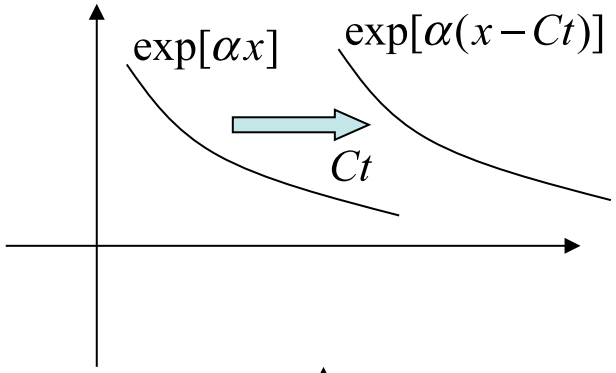
微分方程式の分類ー双曲型

$c): B^2 - AC > 0$ 双曲型(Hyperbolic)の場合

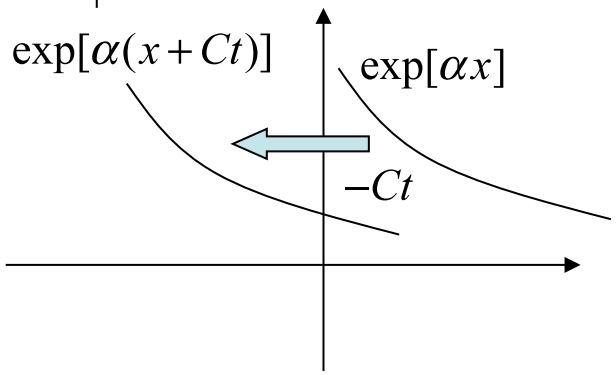
解は $f(t,x) = e^{\alpha x} e^{-C\alpha t} = \exp[\alpha(x - Ct)]$ $(\beta = -C\alpha)$

$f(t,x) = e^{\alpha x} e^{+C\alpha t} = \exp[\alpha(x + Ct)]$ $(\beta = +C\alpha)$

$(\beta = -C\alpha)$ の解：速度Cでx軸+方向に移動



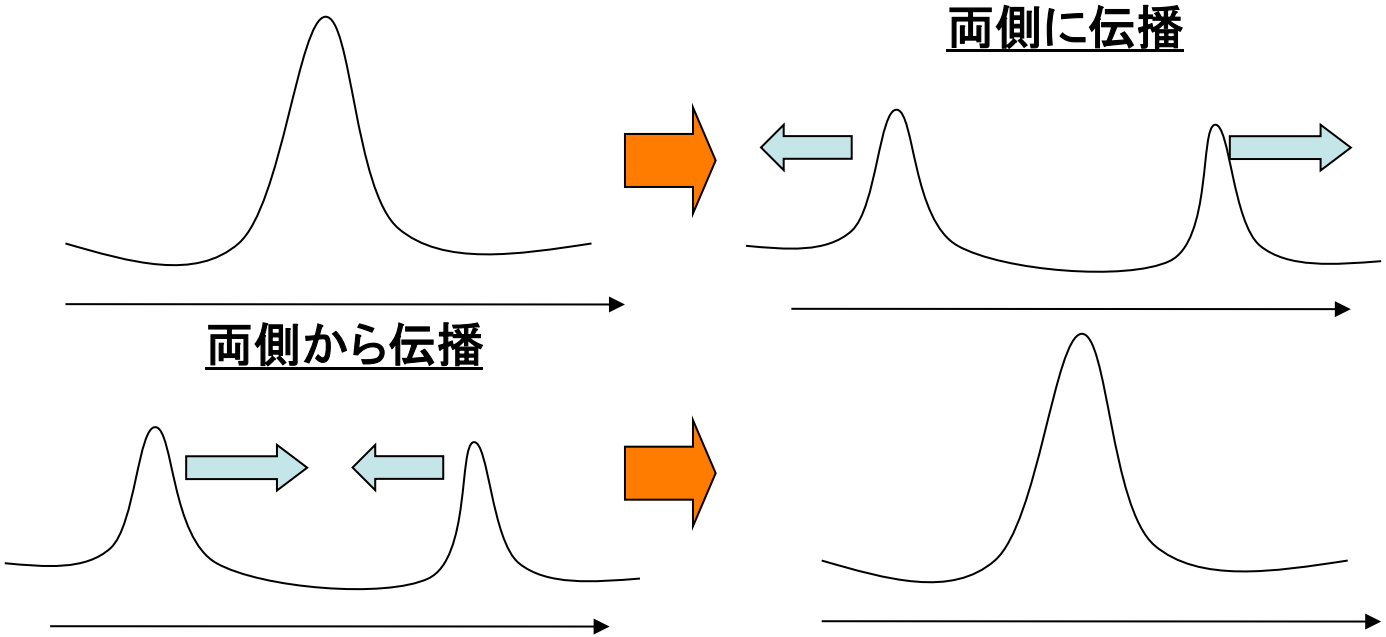
$(\beta = +C\alpha)$ の解：速度Cでx軸-方向に移動



微分方程式の分類ー双曲型

※双曲型：情報（物理量の分布）がある速度で±両方向に伝播する方程式

波動方程式：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ $\left[B^2 - AC = 0^2 - 1 \times (-c^2) = c^2 > 0 \right]$



移流方程式：$\dfrac{\partial f}{\partial t} \pm c \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ ：非線形の場合も

微分方程式の分類ー放物型

$b): B^2 - AC = 0$ 放物型(Parabolic)の場合

因数分解（重根の場合） $\Rightarrow$ $(\beta - \mathrm{K}\alpha)^2 = 0$

但し: $\mathrm{K} = -\dfrac{B}{A}$ $\boxed{\mathrm{K}_{\pm} \in \text{実数}}$

$$\boxed{(\beta - \mathrm{K}\alpha)^2 = 0 \Rightarrow \beta = \mathrm{K}\alpha}$$

解は $f(t,x) = e^{\alpha x} e^{K\alpha t} = \exp[\alpha(x + Kt)]$ のみ

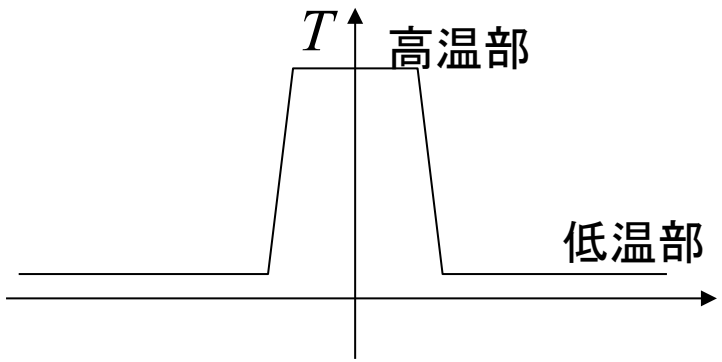
※放物型：情報（物理量の分布）がある速度で一方向にのみ伝播する方程式

微分方程式の分類ー放物型

※放物型：情報（物理量の分布）がある速度で一方向にのみ伝播する方程式

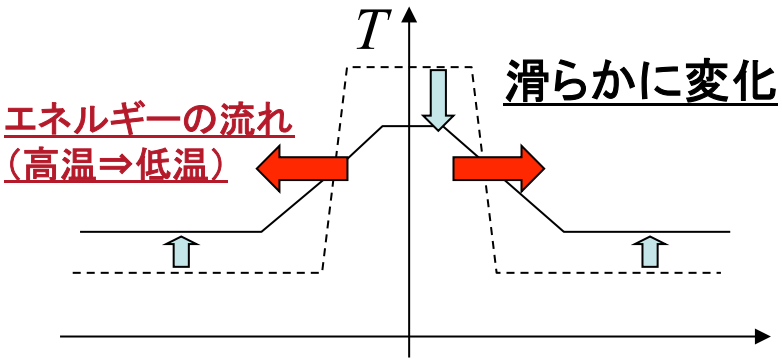
拡散方程式：
（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \left[B^2 - AC = 0^2 - 0 \times (-\nu) = 0 \right]$$

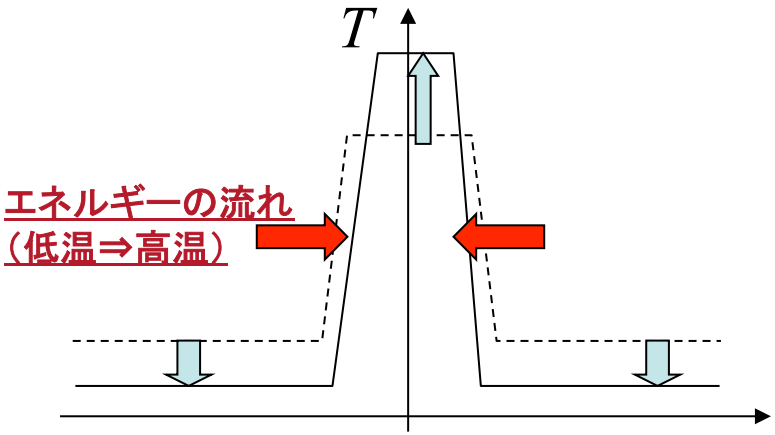


エネルギーの流れは一方通行

現実



非現実



微分方程式の分類ー楕円型

$a): B^2 - AC < 0$ 楕円型(Elliptic)の場合

因数分解 $\Rightarrow$ $(\alpha - \mathrm{K}_- \beta)(\alpha - \mathrm{K}_+ \beta) = 0$

但し: $\mathrm{K}_- = \dfrac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \mathrm{K}_+ = \dfrac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}$

$\mathrm{K}_\pm \in$ 虚数 $\begin{cases} \mathrm{K}_- = \gamma - i\omega, \mathrm{K}_+ = \gamma + i\omega \\ \gamma = -\dfrac{B}{C}, \omega = \sqrt{|B^2 - AC|}/C \end{cases}$ と書ける

$(\alpha - \mathrm{K}_- \beta)(\alpha - \mathrm{K}_+ \beta) = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = \gamma\beta - i\,\omega\beta$ or $\gamma\beta + i\,\omega\beta$

特にB=0のとき、

$\alpha = -i\omega\beta$ or $+i\omega\beta$

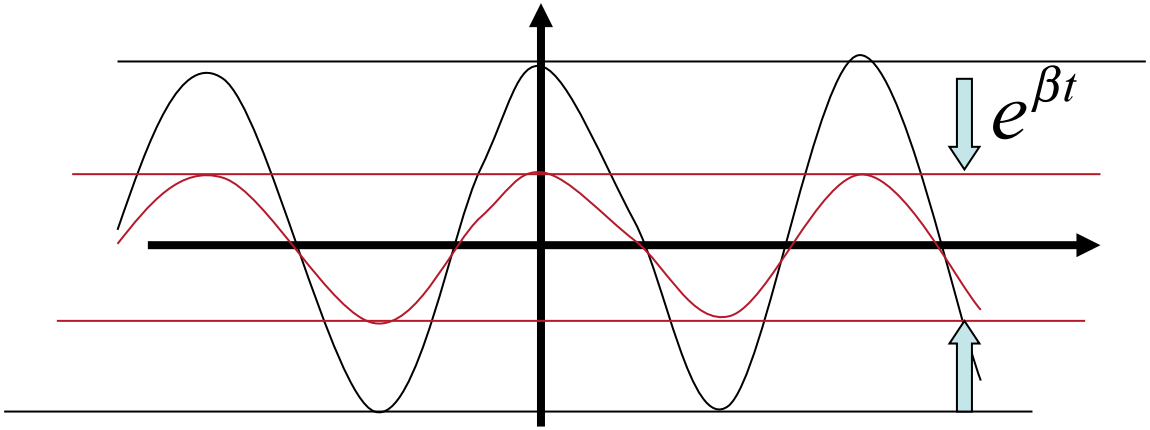
微分方程式の分類ー楕円型

解は B=0のとき、

$$f(t,x)=e^{(-i\omega\beta)x}e^{\beta t}=\mathrm{e}^{\beta t}\times\{\cos(\omega\beta x)-i\sin(\omega\beta x)\}$$

$$f(t,x)=e^{(i\omega\beta)x}e^{\beta t}=\mathrm{e}^{\beta t}\times\{\cos(\omega\beta x)+i\sin(\omega\beta x)\}$$

$\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega\beta x),\mathrm{e}^{\beta t}\times\sin(\omega\beta x)$:振幅が時間tとともに $e^{\beta t}$ 倍に増加（減衰）する**定在波**



※楕円型：情報の空間的伝播は（一見）存在しない方程式

微分方程式の分類ー楕円型

Laplace方程式: $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$

Poisson方程式: $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \rho(x, y)$

$$\left(\begin{array}{l} A = C = 1, B = 0 \\ B^2 - AC = 0^2 - 1 \times 1 = -1 < 0 \end{array} \right)$$

微分方程式の分類と数値計算の関係

微分方程式の分類ごとに異なる物理現象と特徴を持つ

⇒ 各々の方程式型ごとに適した数値計算の方法を選ぶ必要がある。

適切な付帯条件（**Well-Posed**）は、

- ●放物型
- ●双曲型

⇒ 進行波（非定常） ⇒ （境界条件 ＋ 初期条件） が必要

- ●楕円型

⇒ 定在波（定常） ⇒ 境界条件 のみが必要