

複数の多角形で囲まれた立体を多面体という。その中で同じ大きさの正多角形で構成される凸多面体は下図に示すように5種類に限られる(凹多面体まで範囲を広げれば合計9種類になるが、ここでは凸多面体の条件で話を進める)。なぜ5種類のみなのだろうか？この問題を証明する考え方を以下に紹介する。

5種類の証明には多面体に関するオイラーの公式を用いる。この公式は次式のように表される。

$$m_v - m_e + m_f = 2 \quad (1)$$

ここで、 m_v :節点数、 m_e :辺の数、 m_f :面の数である。

オイラーの公式の証明については省略するが、多面体のいくつかに適用すれば公式が成立していることはすぐに確かめられる。また、帰納法的に確認するには、たとえば三角錐を四角錐に変更したときの式(1)の左辺各項の増分量を調べてみるとよい。

つぎに正多面体が成立する条件について考えてみる。正多面体の各面が全て r 角形ならば、次の2つの関係式が常に成立する。ただし、 n は頂点(節点)に集まる辺の数である。

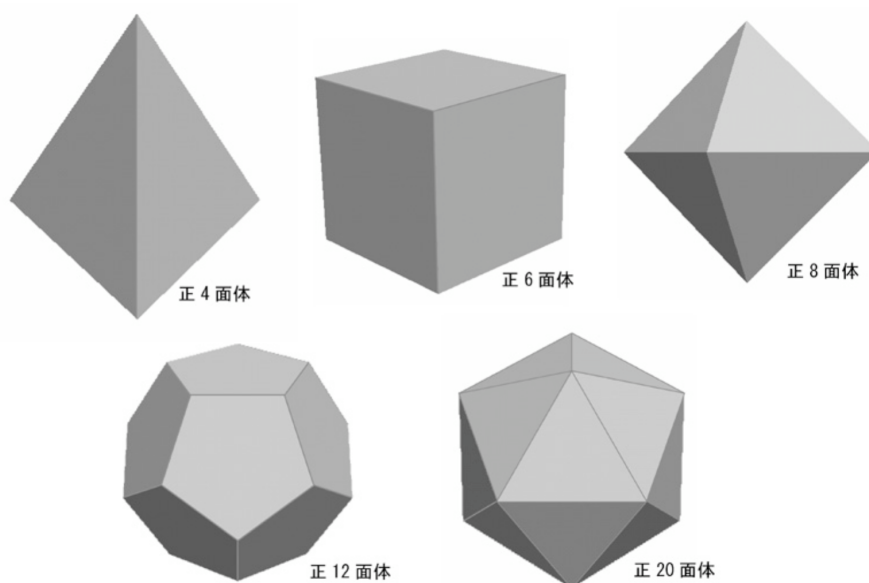
$$r \cdot m_f = 2m_e \quad (2)$$

$$n \cdot m_v = 2m_e \quad (3)$$

オイラーの公式(1)と上記2式を使って m_e , m_v を消去すると以下の方程式が得られる。

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{m_e} \quad n, r \geq 3 \quad (4)$$

この方程式が成立する正の整数解が正多面体ということになる。この解を得るのは難しくないで、各自解いて確認してほしい。なお、同種類の正多角形で凸の頂点をつくれるのは正5角形以下である(正6角形では平面になってしまう)という知識があると式を用いなくても証明できる。この証明も試みてほしい。



5種類の正多面体