化学第一（7）

大学院理工学研究科
物質科学専攻
理学部化学科兼担
教授　市村　禎二郎

Schrödingerの波動方程式(2)

自由電子の波動関数

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger

エルヴィン・ルドルフ・ヨーゼフ・
アレクサンダー・シュレーディンガー
（オーストリアの理論物理学者）
1887/8/12～1961/1/4

ド・ブロイの物質波の概念を元に、1926年にシュレーディンガーの波動方程式を導出した。1933年、ノーベル物理学賞を受賞。

Schrödinger 方程式の導出

弦に沿って伝わる波の式

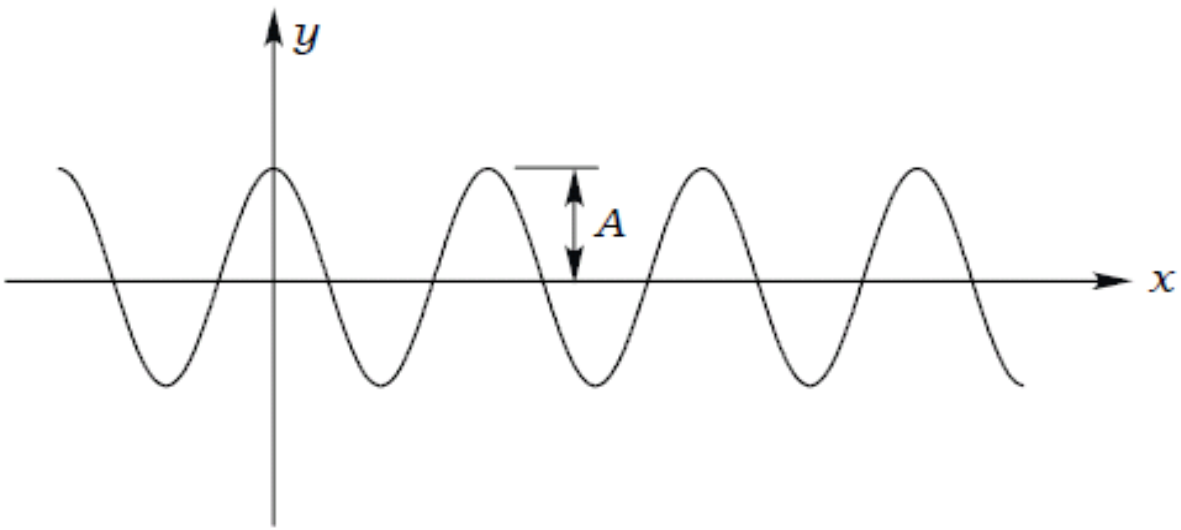
$$y = A\cos\omega\,(t - x/\upsilon) \qquad (1)$$

ω : 角振動数、ν : 振動数

λ : 波長、υ : 波の進行速度

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu$$



t, xについて微分すると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos \omega \left(t - \frac{x}{\upsilon} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 A}{\upsilon^2} \cos \omega \left(t - \frac{x}{\upsilon} \right) \tag{3}$$

弦に伝わる波動の方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4}$$

(4)式の一般解は

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{\upsilon} \right) - iA \sin \omega \left(t - \frac{x}{\upsilon} \right) \tag{5}$$

または

$$y = Ae^{-i\omega(t - x/\upsilon)} \tag{6}$$

Schrödinger 方程式:時間を含む形

物質波を次の式で表す。((6)式で $y \rightarrow \Psi$)

$$\Psi = Ae^{-i\omega(t-x/\upsilon)} \tag{7}$$

$\omega = 2\pi\nu$、$2\pi\nu / \upsilon = 2\pi / \lambda$ の関係を用いると

$$\Psi = Ae^{-2\pi i(\nu t - x/\lambda)} \tag{8}$$

ここで波の性質を粒子の性質で置き換える

$$E = h\nu \qquad \nu = E / h \tag{9}$$

$$\lambda = h / p \tag{10}$$

(8)、(9)、(10) 式より

$$\Psi = Ae^{-(2\pi i / h)(Et - px)} \tag{11}$$

t について一度微分すると

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i E}{h}\Psi \qquad \therefore E\Psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{12}$$

xについて 2 回微分すると

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2 x} = -\frac{4\pi^2 p^2}{h^2}\Psi \quad \therefore p^2\Psi = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \tag{13}$$

ここで　$E = \dfrac{p^2}{2m} + V$ (14)

$$\therefore \quad E\Psi = \frac{p^2\Psi}{2m} + V\Psi \tag{15}$$

(12)、(13)式を代入して

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - V\Psi \tag{16}$$

時間を含む形の Schrödinger 方程式

三次元空間では

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) - V\Psi \tag{17}$$

Schrödinger 方程式:定常形

(11)式で t と x の変数を分離すると

$$\Psi = Ae^{-(2\pi i/h)(Et-px)}$$
$$= Ae^{-(2\pi iE/h)t}e^{+(2\pi ip/h)x} \qquad (18)$$
$$= \psi e^{-(2\pi iE/h)t}$$

(15)式に代入して

$$-E\psi e^{-(2\pi iE/h)t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}e^{-(2\pi iE/h)t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - V\psi e^{-(2\pi iE/h)t} \qquad (19)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \qquad (20)$$

Schrödinger 方程式の定常形

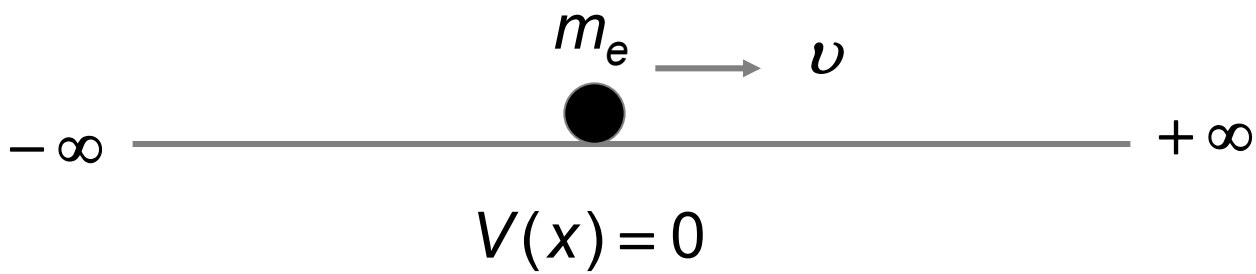
三次元空間では

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \qquad (21)$$

自由電子の波動関数

- x 軸上を自由に運動している場合
- 一次元の箱の中を運動している場合
- 円周上を運動している場合

電子がx軸上を自由に運動している場合



質量m_eの電子がx軸上を－∞から＋∞まで速度υで自由に運動している場合を考える。
ここでポテンシャル（位置）エネルギーは0とする。
電子の運動は波動なので波動関数（ $\psi(x)$ ）として表される。

x軸上を自由に運動している電子の波動関数を求めてみよう。

いま電場も磁場もない場合を考えると、V(x)=0 とおくことができる。

電子の質量をm_eとすると、一次元の Schrödinger の波動方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=E\psi(x) \qquad (4.19)$$

となる。この微分方程式の解は、A、λを定数とすると、

$A\exp(\lambda x)$、$A\cos\lambda x$、または$A\sin\lambda x$

となることが知られている。そこで、$\psi(x)=A\exp(\lambda x)$を式(4.19)に代入し左辺を演算($\psi(x)$をxに関して 2 回微分)すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\lambda^2\psi(x)=E\psi(x) \qquad (4.20)$$

これより、$E=-\hbar^2\lambda^2/2m_e$となり、一方、$E={p_x}^2/2m_e$の関係式より

$$\lambda=\pm i\frac{\sqrt{2m_eE}}{\hbar}=\pm i\frac{p_x}{\hbar} \tag{4.21}$$

したがって、波動関数$\psi(x)$は、次のように求まる。

$$\psi^{\pm}(x)=A\exp(\pm ik_x x)、k_x=\frac{p_x}{\hbar} \tag{4.22}$$

ここで電子の運動量を求めるために、その演算子$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$を波動関数$\psi^{\pm}(x)$に作用させると、

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi^{\pm}(x)=\pm p_x\psi^{\pm}(x) \tag{4.23}$$

となり、固有値である$\pm p_x$は、それぞれ正の方向あるいは負の方向に運動している電子の運動量であることがわかる。

一次元の運動をしている自由電子の波動関数は、$A\cos\lambda x$、$A\sin\lambda x$、または求めた波動関数の線形結合 $A\exp(i\lambda x)+B\exp(-i\lambda x)$ の形でも書くことができる。しかし、運動量として $\pm p_x$ という固有値をもつ波動関数は

$$-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi^{\pm}(x)=\pm p_x\psi^{\pm}(x) \tag{4.23}$$

だけである。

数直線上の自由電子の確率密度

著作権上の問題で表示できません。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\psi^{+}(x)\right|^{2} dx = 1$$

ここで、電子の確率密度の分布について考えてみよう。波動関数$\psi^{+}(x)$を用いて座標xにおける電子の確率密度を求めると、

$$\left|\psi^{+}(x)\right|^{2} = \left(\psi^{+}(x)\right)^{*}\psi^{+}(x) = \left|A\right|^{2}\exp(-ik_{x}x)\exp(ik_{x}x) = \left|A\right|^{2} \qquad (4.24)$$

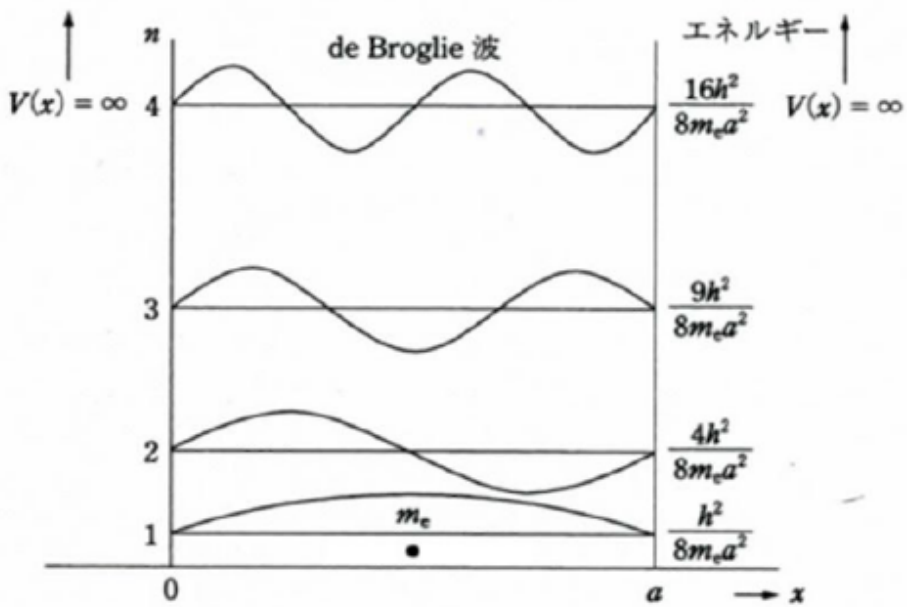
となり、電子の存在確率はxの値によらず一定である。

通常、定数Aは規格化の条件$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi^{+}(x)\right|^{2}dx=1$より決められる。この場合、$x$の値は－∞から＋∞までとれる。$|A|^2$の値は、$x$のあらゆる値に対して１にならなければならないので、Aは無限に小さくならなければならない。つまり、Aの値はこれ以上決めることができない（不定という）のである。しかし、この波動関数は運動量p_xを正確に記述しており、電子の位置xの値はまったく不確定となり全空間に広がってしまうという不確定性原理、

$$\Delta x \times \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

が働いていると解釈できる。

自由電子の波動関数
一次元の箱の中を運動する場合



長さがaの一次元の箱に閉じ込められた自由電子の波動関数を考えてみよう。すなわち、$x=0$からaの間のみ電子は自由に運動でき（$V(x)=0$）、$x<0$と$x>a$の範囲には電子の入り込めない壁（$V(x)=\infty$）があるものとする。（境界条件）

この電子の波動関数を$\psi(x)$とする。$x<0$、$x>a$の範囲には電子は存在できないから、確率密度、$|\psi(x)|^2=0$である。すなわち、

$$\psi(x)=0 \qquad (x<0, x>a) \tag{1-33}$$

波動関数の連続性から、当然、

$$\psi(0)=\psi(a)=0 \tag{1-34}$$

であることが要求される。このような条件を境界条件（boundary conditions）という。$0<x<a$の範囲では Schrödinger の波動方程式は

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\psi(x,y,z)$$
$$=E\psi(x,y,z)$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x) \qquad (1\text{-}35)$$

と表される。この方程式を満足する波動関数$\psi(x)$は前出の(4-19)式と同じなので、$\psi(x) = A\sin\lambda x$となる。

ここで、(1-34)式の境界条件を$\psi(x) = A\sin\lambda x$に代入することにより、波動関数は、

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad (1\text{-}36)$$

と表される。次に$\psi(x)$を規格化することによって定数Aを求める。

電子はxが0とaの間に必ず存在することから（規格化）、

$$\int_0^a \left|\psi(x)^2\right| dx = 1 \qquad (1\text{-}37)$$

上式の右辺に（1−36）式$\psi(x) = A\sin(n\pi x/a)$を代入すると、次式となる。

$$|A|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x = 1$$

ここで$\sin^2\frac{n\pi}{a}x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{a}x\right)$の関係式を左辺に代入し、積分すると

$$\frac{1}{2}|A|^2\left[x - \frac{a}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{a}x\right]_0^a = 1$$

これを計算して、$A = \sqrt{2/a}$と求まる。

こうして1辺aの一次元ポテンシャル箱中の電子の運動を表す波動関数が得られる。

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 1,2,3,\cdots \tag{1-38}$$

ここで、電子に許されるエネルギーEの値を求めてみよう。

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{1-36}$$

の$\psi(x)$を

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x) \tag{1-35}$$

の左辺に代入して、xで2回微分を行うと、

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$= \frac{n^2 h^2}{8m_e a^2}A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

となる。また(1-35)式の右辺は、同様に$\psi(x)$を代入すると、

$$E\psi(x) = E\cdot A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

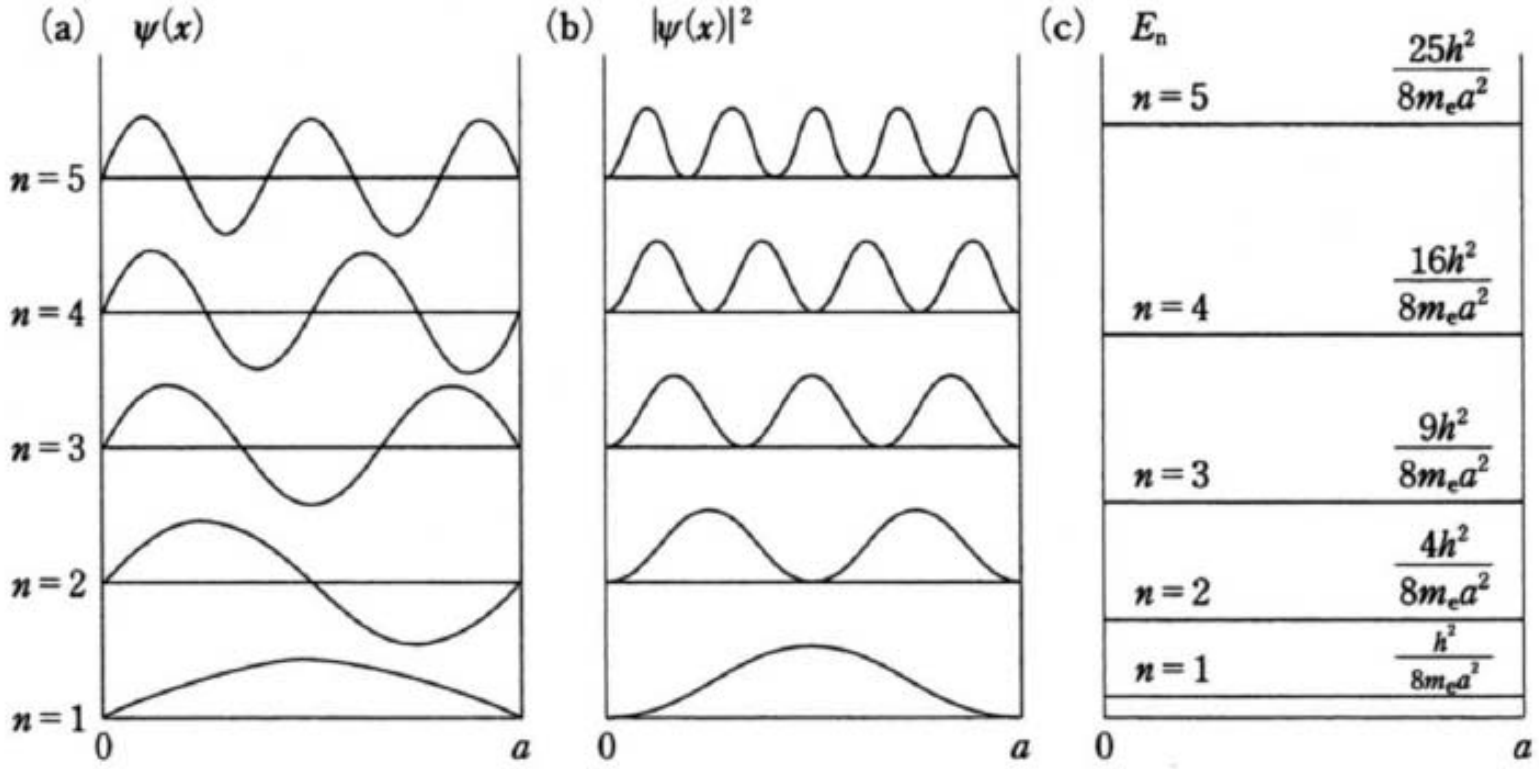
となり、左辺＝右辺なので、これよりエネルギーEの値は、

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8m_e a^2} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

と求まる。すなわち、エネルギーは量子数nの関数として量子化されており、とびとびの値しかとれないことがわかる。なお de Broglie 波から求めた(1-28)式の値と完全に一致する。

このようにして求まった一次元ポテンシャル箱中の

電子の波動関数(a)、確率密度(b)、エネルギー準位(c)



を図に示す。

ところで運動量に対応する演算子$-i\hbar \cdot d/dx$を波動関数$\psi(x)$に作用させてみると、

$$-i\hbar \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right) = -\frac{i\hbar n\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x \tag{4.37}$$

となって、固有値が得られない。

そこで、運動量の平均値を計算してみると

$$\overline{p}_x = \frac{\int_0^a \left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right)dx}{\int_0^a \left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\right)dx} = 0 \tag{4.38}$$

となってしまう。

すでに求めた自由電子の波動関数

$$\psi^{\pm}(x) = A\exp(\pm ik_x x)、k_x = \frac{p_x}{\hbar} \qquad (4.22)$$

およびオイラーの公式

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を参考にして

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 1,2,3,\cdots \qquad (1-38)$$

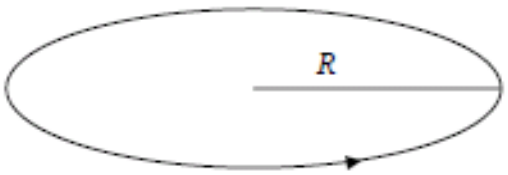
の波動関数を書き換えると、

$$\psi(x) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{a}}\left\{\exp\left(i\frac{\sqrt{2m_e E_n}}{\hbar}x\right) - \exp\left(-i\frac{\sqrt{2m_e E_n}}{\hbar}x\right)\right\} \qquad (4-39)$$

となる。

これは、運動量の大きさ$\sqrt{2m_eE_n}$をもつ正の方向への運動を表す波動関数と同じ運動量の大きさをもち、負の方向への運動を表す波動関数との和(重ね合わせ)になっている。すなわち、箱の中に閉じ込められた電子の運動の方向が、一方向ではなく反対向きの運動も存在するため、物質波の定在波のような波動状態しか許されなくなり、その結果、運動量は平均値として打ち消されていると考えられる。

円周上を運動する電子



半径が一定（R）の円周上を運動する電子の場合を考えてみよう。このときポテンシャル$V(x,y,z)$は、その円周上ではどこでも一定であると考えて、$V(x,y,z)=0$とする。円周がxy平面上にあるとすれば、z軸方向の運動は問題にならない。その結果、Schrödingerの波動方程式は

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}\right)=E\psi(x,y) \qquad (1\text{-}39)$$

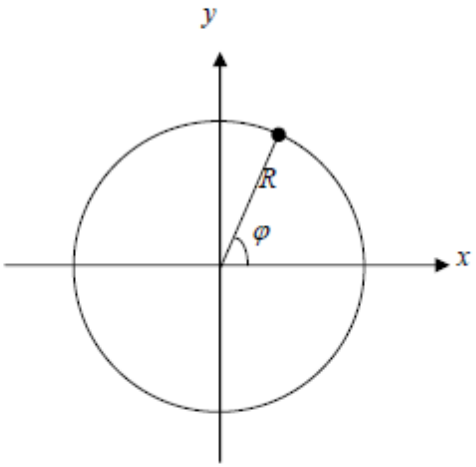
と表される。

しかし、運動が半径Rの円周上に限定されているから、円の中心を原点にとると

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1\text{-}40)$$

という条件がxとyにつけられる（境界条件）。ところで、この円周運動はx、yの二次元座標として表されているが、一次元の運動として取り扱うこともできる。

半径Rの円周上の点(x, y)は原点と点(x, y)を結ぶベクトルがx軸となす角度φを用いて表すことができる。



円周上を運動する電子の波動方程式

円周上を運動する電子の波動方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = E\psi \qquad \text{(A1)}$$

である。半径をR（一定）とすると、

$$x^2+y^2=R^2 \qquad \text{(A2)}$$

より、

$$x=R\cos\varphi, \quad y=R\sin\varphi \qquad \text{(A3)}$$

$$\tan\varphi = y/x \qquad \text{(A4)}$$

これから、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\varphi = -\frac{\sin\varphi}{R} \tag{A5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}\cos^2\varphi = \frac{\cos\varphi}{R} \tag{A6}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{A7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{A8}$$

が得られる。

したがって、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=-\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(A9)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(A10)}$$

よって、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{(A11)}$$

が得られる。

また、半径Rのベクトルがx軸から角度φ（単位：ラジアン）の位置にあるとき、円周上の弧の長さをsとすると

$$s = R\varphi$$

と表される。この電子の波動方程式は次式で表される。

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}s^2} = E\psi$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

すると、(1-39)式の微分方程式は

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m_e R^2}\frac{\partial^2\psi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=E\psi(\varphi) \qquad (1\text{-}41)$$

と書き直すことができる。この微分方程式(1-41)式を満足する解は次の指数関数の式で表される。

$$\psi(\varphi)=Ae^{i\lambda\varphi} \qquad (1\text{-}42)$$

(1-42)式を(1-41)式に代入すると、

$$E=\frac{\lambda^2 h^2}{8\pi^2 m_e R^2} \qquad (1\text{-}43)$$

であることがわかる。(1-42)式の$\psi(\varphi)$はこれで十分のように思われるが、実はまだ物理的な条件(定在波)を満たしているかどうかを考慮していない。

円周上の波動運動であるから、角度φを$\varphi+2\pi$、すなわちもう 1 回転したとき、波動関数は前と同じでないといけないから

$$Ae^{i\lambda\varphi} = Ae^{i\lambda(\varphi+2\pi)}$$

でなくてはならない。このことから

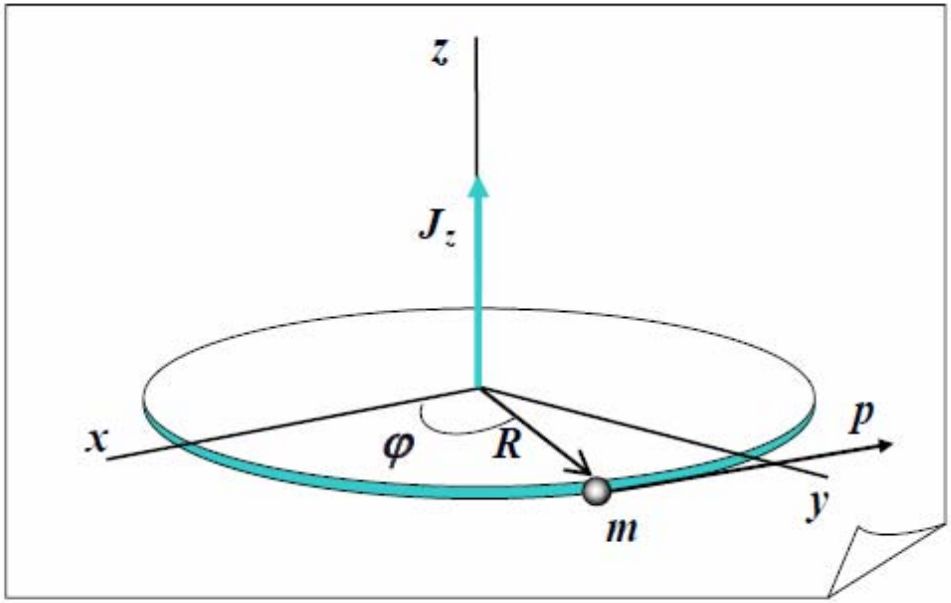
$$e^{i\lambda 2\pi} = 1$$

が要求される。このことからλは任意の値をとれず、

$$\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots \qquad (1\text{-}44)$$

であることが定められる。すなわち（1-43）式で表される円周運動する電子のエネルギーは、一次元のポテンシャル箱中における運動と同様にとびとびの値しかとれないことになる。

xy 面内にある半径 Rの円周上の質量m の粒子の角運動量



角運動量 J_zはこの面に垂直で大きさが pRのベクトルで表してある。

ここで、円周上を運動する電子の軌道角運動量を求めてみよう。

角運動量を表す演算子は

$$-\frac{hi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

と表される。これを(1-42)式の波動関数$\psi(\varphi)=Ae^{i\lambda\varphi}$に作用させてみると

$$-\frac{hi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}Ae^{i\lambda\varphi}=\frac{\lambda h}{2\pi}Ae^{i\lambda\varphi}$$

となるから、$Ae^{i\lambda\varphi}$という波動関数で表される運動における角運動量Lは

$$L=\frac{\lambda h}{2\pi}\qquad(\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad(1\text{-}45)$$

であることがわかる。したがって、最もエネルギーの低い状態では角運動量をもたないことになり、エネルギーと同様、とびとびの値をとる。

次に定数Aの値を考えてみよう。Aの値は規格化の条件から求められる。

波動関数は$\psi(\varphi)=Ae^{i\lambda\varphi}$とすると、電子は円周上（$\varphi$は0から$2\pi$ラジアンで1回転）を運動し、どこかに存在するので、

$$\int_0^{2\pi}|\psi(\varphi)|^2\mathrm{d}\varphi=1$$

$$\int_0^{2\pi}\psi^*(\varphi)\mathrm{d}\varphi=1$$

$$\int_0^{2\pi}|A|^2\cdot e^{-i\lambda\varphi}\cdot e^{i\lambda\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}|A|^2\mathrm{d}\varphi=|A|^2\cdot 2\pi=1$$

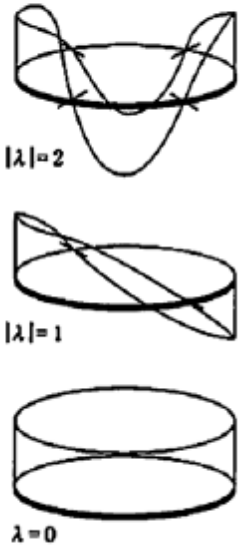
となり、この関係式より，次式が得られる。

$$A=\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \qquad (1\text{-}46)$$

こうして、(1-42)式、(1-44)式と(1-46)式より波動関数は次のように決められる。

$$\psi(\varphi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i\lambda\varphi} \qquad \lambda=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \tag{1-47}$$

この波動関数の実数部分を図に示す。



以上のように、簡単な例

- 数直線上を自由に運動している電子
- 一次元の箱の中を運動している電子
- 円周上を運動している電子

では、その波動関数が容易に求められ、それを用いて種々の物理量（運動量または角運動量、エネルギー）を計算することが可能であることを示した。